



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos

Área de Mecánica de Fluidos



PROYECTO FIN DE CARRERA

ESTUDIO NUMÉRICO DE LA DINÁMICA DE
CHORROS TRANSITORIOS DE DISTINTA
DENSIDAD

Autor: David Martín Domínguez

Tutor: Dra. Carolina Marugán Cruz

Leganés, 20 de Diciembre de 2012

Título: ESTUDIO NUMÉRICO DE LA DINÁMICA DE CHORROS TRANSITORIOS DE DISTINTA DENSIDAD

Autor: David Martín Domínguez

Director:

EL TRIBUNAL

Presidente: María Venegas Bernal

Vocal: Mario Sánchez Sanz

Secretario: Antonio Gámiz Blázquez

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día 20 de Diciembre de 2012 en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

Agradecimientos

Finalmente, no queriendo desaprovechar la ocasión, he incluido este apartado dentro del Proyecto Fin de Carrera, para expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que tanto directa como indirectamente, con su ayuda y colaboración han hecho posible la consecución de este proyecto.

Quiero agradecer a mi familia, y especialmente a mis padres, la comprensión, la paciencia y el apoyo incondicional recibido a lo largo de los años, sin los cuales no hubiese sido posible la consecución de mis estudios.

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos todos los momentos que hemos vivido juntos a lo largo de estos años de Universidad, superando juntos los problemas que hemos ido encontrando.

Quiero agradecer a mi tutora Dra. Carolina Marugán, la confianza que depositó en mí para la realización de este Proyecto Fin de Carrera; la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa, que han hecho posible su consecución.

Por último, quiero agradecer a todo el colectivo que forma la Universidad Carlos III de Madrid, su trabajo y dedicación, y el haberme proporcionado los mejores medios para el logro del éxito futuro.

A todos ellos, muchas gracias.

Resumen

El presente Proyecto trata el estudio de la evolución de chorros inyectados en el seno de otro fluido, en presencia de la acción de la gravedad en el sentido del avance del chorro. En los casos de estudio en los que el chorro es más denso que el ambiente, se generan fuerzas de flotabilidad negativas.

El flujo es definido para todos los casos de estudio como transitorio, laminar ($Re=2000$), isotermo y viscoso. Realizándose bajo estas características tres casos de estudio diferenciados por su número de Froude densimétrico: $Fr=\infty$, $Fr=10$ y $Fr=5$.

Los parámetros analizados son: la penetración del chorro, localización del vórtice principal, estudio de la vorticidad y su distribución en el vórtice principal, análisis de la circulación total en el ambiente y en el vórtice principal, y determinación de la evolución de la energía cinética y el impulso hidrodinámico total en el ambiente.

El análisis de los resultados proporciona nuevas conclusiones no abordadas en anteriores Proyectos tales como:

- El análisis de la diferencia entre el centro del vórtice principal y el punto de máxima vorticidad.
- El seguimiento del vórtice principal en los casos donde no se produce “*pinch-off*”, y su aplicación al cálculo de la circulación del vórtice.
- Como resultado del análisis de la circulación en el vórtice principal se evalúa la aportación del par baroclínico a la misma.
- El estudio de la evolución temporal de la energía cinética total transmitida al ambiente.
- La descripción de la evolución temporal del impulso hidrodinámico total transmitido al ambiente.
- Como resultado del estudio de la evolución del impulso hidrodinámico se comprueba el principio de maximización de la energía en el vórtice principal.

- Se propone el estudio del impulso hidrodinámico en el vórtice principal como método de determinación del número de formación en casos de estudio donde no se observa el “*pinch-off*”.

Los resultados han sido obtenidos mediante simulación numérica con el programa *Ansys Fluent*, realizando nuestros propios códigos *UDF* en lenguaje de programación C, y códigos *Journal*, en lenguaje del propio programa *Fluent*.

Mediante el uso del programa *Matlab* hemos realizado el tratamiento de datos, la generación de gráficas y la creación de los códigos *Journal* utilizados por *Fluent*.

La importancia de los conceptos abordados en el presente proyecto queda reflejada en la diversidad de aplicaciones prácticas expuestas en la introducción del mismo.

Palabras clave: Vorticidad, impulso hidrodinámico, vórtice, flotabilidad, número de formación, Froude, chorro.

Abstract

This project studies the evolution of fluid jets discharged into another fluid in the presence of gravity forces in the same direction as the moving jet. In study cases where the fluid jet has higher density than the ambient, negatively buoyancy forces are generated.

Fluid flow is considered as transient, laminar ($Re=2000$), isotherm and viscous, in all study cases. Under these conditions we describe three different cases based on its densimetric Froude number: $Fr=\infty$, $Fr=10$ y $Fr=5$.

Flow parameters analyzed: flow penetration depth, leading vortex location, leading vortex centre vorticity and its vorticity distribution, total ambient circulation and leading vortex circulation, and total kinetic energy and hydrodynamic impulse evolution in the ambient.

The analysis of the results show new conclusions, that have never been pointed out in previous projects developed in the Fluid Mechanics Department:

- Analysis of the different location between vortex centre and maximum vorticity point.
- The capability of tracing the evolution of leading vortex core when pinch-off process is not observed, and its application in the calculation of leading vortex circulation.
- As a consequence of the previous conclusion, its application into the calculation of the effects of baroclinic torque on leading vortex circulation.
- Time evolution study of both total kinetic energy and hydrodynamic impulse transmitted to the ambient.
- As a consequence of the study of hydrodynamic impulse, the principle of vortex ring maximum energy is confirmed.
- Hydrodynamic impulse study is proposed as a method to obtain the formation number when pinch-off is not observed in the considered study case.

Numerical simulations, using *Ansys Fluent* software, were performed to obtain the results, as well as our own *UDF* and *Journal* codes, using *C* and *Fluent* programming languages, respectively.

Math software, *Matlab*, was used for data post-processing and, plot and *Journal* codes creation.

The importance of the concepts highlighted in this project is shown through the wide and diverse range of practical applications pointed out in the introductory chapter.

Keywords: Vorticity, hydrodynamic impulse, vortex, buoyancy, formation number, Froude, jet.

Índice general

Capítulo 1

Introducción	21
1.1 Experimentación.	22
1.2 Motivación y aplicaciones.	25

Capítulo 2

Definición del proyecto.....	31
2.0 Introducción.	31
2.1 Descripción del proyecto.	32
2.2 Datos iniciales del proyecto.	36
2.2.1 Características de los fluidos implicados.	36

Capítulo 3

Desarrollo del proyecto.....	39
3.0 Introducción.	39
3.1 Planteamiento de las ecuaciones.	41
3.1.1 Ecuaciones generales.	41
3.1.2 Condiciones iniciales y de contorno.	43
3.1.3 Adimensionalización.....	46
3.1.4 Descarga de agua en agua. Caso homogéneo.....	48
3.1.5 Descarga de agua en ambiente de mezcla. Casos de mezcla.	49
3.2 Parámetros de análisis.....	52
3.2.1 Evolución del chorro de agua.....	52
3.2.2 Posición y velocidad del frente del chorro.	55
3.2.3 Posición del vórtice de cabeza.	57

3.2.4 Vorticidad en el torbellino de cabeza.....	59
3.2.5 Circulación.....	64
3.2.6 Energía cinética.....	69
3.2.7 Impulso hidrodinámico.....	75
Capítulo 4	
Evaluación de los resultados.....	81
4.0 Introducción.....	81
4.1 Evolución del chorro de agua.....	82
4.2 Posición y velocidad del frente del chorro.....	86
4.3 Posición del vórtice de cabeza.....	93
4.4 Vorticidad en el torbellino de cabeza.....	97
4.5 Circulación.....	105
4.6 Energía cinética.....	112
4.7 Impulso hidrodinámico.....	122
Capítulo 5	
Conclusiones.....	129
5.1 Trabajos futuros.....	131
Referencias	133
Anexos	
Anexo A. Generación del problema en Fluent.....	135
A.1 Refinamiento dinámico de la malla.....	137
A.2 Definición de las características generales del proyecto en Fluent.....	138
A.3 Definición de los materiales implicados en el proyecto en Fluent.....	140
A.4 Definición de las condiciones de contorno en Fluent.....	144
A.5 Resolución numérica de los casos de estudio en Fluent.....	152
Anexo B. Tabla de propiedades de la mezcla.....	157
Anexo C. Gráficos de resultados en Fluent.....	159
C.1 Vorticidad. Caso homogéneo.....	159
C.2 Vorticidad. Caso de flotabilidad negativa $Fr = 10$	160
C.3 Vorticidad. Caso de flotabilidad negativa $Fr = 5$	161
Anexo D. Validez de los resultados: Caso homogéneo.....	163
Anexo E. Códigos UDF. Programación en lenguaje C.....	167

Índice de figuras

Figura 1.1.1. Esquema del sistema de inyección.	22
Figura 1.1.2. Detalle del sistema de inyección.	23
Figura 1.1.3. Uso de los anillos de vorticidad en el campo de la Publicidad.	24
Figura 1.1.4. Evolución del empuje medio adimensional frente al número de formación.	25
Figura 1.2.1. Mecanismo de actuación de chorros en cefalópodos y medusas. .	27
Figura 1.2.2. Vórtices creados en los flaps de aviones.	28
Figura 1.2.3. Vórtices creados en por el viento detrás de islas.	28
Figura 1.2.4. Esquema de la laringe. Vórtices en la bioingeniería médica.	30
Figura 2.1.1. Esquema del volumen de control.	32
Figura 2.1.2. Zonas del volumen de control.	33
Figura 2.1.3. Distribución número de Reynolds en el orificio de entrada.	33
Figura 2.2.1. Evolución de la densidad y viscosidad dinámica en función de la fracción másica de agua, en una mezcla agua-alcohol etílico.	37
Figura 3.1.1. Zonas del volumen de control. Simetría axial.	44
Figura 3.2.1. Isocontorno de vorticidad adimensional, $w^* = 1$, en un tiempo adimensional, $t^* = 19.72$, para el caso de flotabilidad negativa $Fr = 5$	67
Figura 4.1.2. Evolución del campo de densidades en la descarga de agua en mezcla de agua y alcohol con $Fr = 10$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.526, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.	84

Figura 4.1.3. Evolución del campo de densidades en la descarga de agua en mezcla de agua y alcohol con $Fr = 5$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.501, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.	85
Figura 4.2.1. Evolución temporal de la posición del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de agua en agua.	86
Figura 4.2.2. Evolución temporal de la velocidad del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de agua en agua.	87
Figura 4.2.3. Evolución temporal de la posición del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de los casos de mezcla.....	89
Figura 4.2.4. Evolución temporal de la velocidad del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de los casos de mezcla.....	90
Figura 4.2.5. Evolución temporal de la posición adimensionalizada del frente del chorro en todos los casos de estudio.	92
Figura 4.2.6. Evolución temporal de la velocidad adimensional del frente del chorro en todos los casos de estudio.	92
Figura 4.3.1. Evolución temporal de la coordenada axial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio.....	93
Figura 4.3.2. Evolución temporal de la coordenada radial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio.....	94
Figura 4.4.1. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza en la descarga de agua en agua.	98
Figura 4.4.2. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza en los casos de mezcla.	99
Figura 4.4.3. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio.	100
Figura 4.4.4. Distribución radial de la vorticidad adimensional en el centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio para $t^* \sim 0.5$ (Superior) y $t^* \sim 5.5$ (Inferior)	101
Figura 4.4.5. Distribución radial de la vorticidad adimensional en el centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio para $t^* \sim 10.5$ (Superior), $t^* \sim 15.5$ (Medio) y $t^* \sim 20$ (Inferior).	103
Figura 4.4.6. Distribución espacial de la vorticidad adimensional en el caso de mezcla $Fr = 5$ para $t^* \sim 20$	104

Figura 4.5.1. Evolución temporal de la circulación adimensional total y del vórtice, en la descarga de agua en agua.	106
Figura 4.5.2. Isocontorno de vorticidad adimensional, $w^*=0.5$, en un tiempo adimensional, $t^*=18.26$, para la descarga de agua en agua.....	106
Figura 4.5.3. Evolución temporal de la circulación adimensional total y del vórtice en los casos de mezcla.	108
Figura 4.5.4. Evolución temporal de la circulación adimensional total y del vórtice en todos los casos de estudio.	110
Figura 4.6.1. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo. Descarga de chorro agua-agua.	113
Figura 4.6.2. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo. Descarga de chorro de agua en mezcla alcohol y agua.....	115
Figura 4.6.3. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio.	116
Figura 4.6.4. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio hasta $t^* = 2$	117
Figura 4.6.5. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio hasta $t^* = 5$	119
Figura 4.6.6. Evolución del logaritmo de la energía cinética adimensional en función del logaritmo del tiempo adimensional en todos los casos de estudio desde $t^* = 3$ hasta $t^* = 20$	120
Figura 4.7.1. Evolución del impulso hidrodinámico adimensional en el tiempo. Descarga de chorro agua-agua.	122
Figura 4.7.2. Evolución del impulso hidrodinámico adimensional en el tiempo. Descarga de chorro de agua en mezcla alcohol y agua.....	124
Figura 4.7.3. Evolución del impulso hidrodinámico adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio.	125
Figura 4.7.4. Evolución de la derivada temporal del impulso hidrodinámico adimensional en todos los casos de estudio.	126
Figura 4.7.5. Evolución del logaritmo del impulso hidrodinámico adimensional en función del logaritmo del tiempo adimensional en todos los casos de estudio desde $t^* = 3$ hasta $t^* = 20$	127
Figura A.1. Cuadro de diálogo inicial del programa Fluent.	136

Figura A.2. Malla inicial en todo el dominio de cálculo.	136
Figura A.3. Cuadro de diálogo de selección de parámetros de refinamiento de la malla. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).	137
Figura A.4. Malla en todo el dominio de cálculo. Caso homogéneo (arriba) y Casos de mezcla (abajo).....	138
Figura A.5. Cuadro de diálogo de selección de parámetros generales de los casos de estudio.....	138
Figura A.6. Cuadro de diálogo de selección del modelo. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).	139
Figura A.7. Cuadro de diálogo de selección del modelo de especies.....	140
Figura A.8. Cuadro de diálogo de selección de los materiales de los casos de estudio. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).....	140
Figura A.9. Cuadro de diálogo de selección del número de escalares pasivos.	141
Figura A.10. Cuadro de diálogo de selección propiedades del ambiente. Caso homogéneo.	142
Figura A.11. Cuadro de diálogo de selección de la difusividad de los escalares pasivos.....	142
Figura A.12. Cuadro de diálogo de selección propiedades de la mezcla. Casos de mezcla.....	143
Figura A.13. Cuadro de diálogo de selección de especies de la mezcla. Casos de mezcla.	144
Figura A.14. Cuadro de diálogo de selección de propiedades de la zona de celdas.....	145
Figura A.15. Cuadro de diálogo de selección de condiciones de operación. ...	145
Figura A.16. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. General.	146
Figura A.17. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Momento en pared vertical.	147
Figura A.18. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. UDS en pared vertical. Caso homogéneo.	148
Figura A.19. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Species en pared vertical. Casos de mezcla.	148

Figura A.20. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Momento en contornos libres.....	149
Figura A.21. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Momento en orificio de entrada.....	149
Figura A.22. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. UDS en orificio de entrada. Caso homogéneo.....	150
Figura A.23. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Species en orificio de entrada. Casos de mezcla.	151
Figura A.24. Cuadro de diálogo de selección de los valores de referencia. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).	151
Figura A.25. Cuadro de diálogo de selección del tipo de resolución.	152
Figura A.26. Cuadro de diálogo de selección de la discretización espacial. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).	152
Figura A.27. Cuadro de diálogo de selección de los parámetros de sobrerrelajación. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).	153
Figura A.28. Cuadro de diálogo de selección de los límites de la solución.	153
Figura A.29. Cuadro de diálogo de selección de los parámetros temporales de la resolución. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).....	154
Figura A.30. Cuadro de diálogo de selección de los parámetros del tiempo adaptativo. Caso homogéneo.	155
Figura C.2. Evolución de la vorticidad adimensional en el caso de flotabilidad negativa $Fr = 10$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.526, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.....	160
Figura C.3. Evolución de la vorticidad adimensional en el caso de flotabilidad negativa $Fr = 5$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.501, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.....	161
Figura D.1. Evolución temporal de la posición del frente del chorro adimensionalizada. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.....	163
Figura D.2. Evolución temporal de la coordenada axial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.....	164
Figura D.3. Evolución temporal de la coordenada radial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.....	164

Figura D.4. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.....	165
Figura D.5. Evolución temporal de la circulación adimensional total. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.....	165
Figura D.6. Evolución temporal de la circulación adimensional local. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.....	166

Capítulo 1

Introducción

El estudio y análisis de la dinámica de fluidos es de gran importancia para una gran cantidad de aplicaciones desde escalas microscópicas a atmosféricas. En muchos de los casos, los estudios y análisis se realizan bajo ciertas simplificaciones, que facilitan tanto la resolución como el entendimiento del caso en concreto que se lleve a estudio.

Puesto que vivimos en un mundo tridimensional, puede ser menos obvio el por qué del interés en el entendimiento de los flujos bidimensionales. Sin embargo, en muchas aplicaciones, como las atmosféricas u oceánicas, el dominio del fluido es mucho más pequeño en una dirección que en las otras dos, y también más pequeño que el tamaño característico de ciertos parámetros de interés en el fluido. Por ejemplo, en el caso de la atmósfera, su grosor es de unas pocas decenas de kilómetros, mientras que la extensión lateral es de decenas de miles de kilómetros, y el tamaño de un parámetro de interés como pueda ser el diámetro de un huracán, puede tener varios cientos de kilómetros. Además, en ambas aplicaciones, tanto atmosféricas como oceánicas, la aplicación de aproximaciones bidimensionales se ve reforzada por dos efectos adicionales: la estratificación del medio (lo cual reduce el grosor eficaz del dominio) y la rotación de la tierra, que tiende a reducir las variaciones del campo de vorticidad con la altura, significando que en un plano transversal el flujo es eficazmente bidimensional. En tales circunstancias una aproximación bidimensional en el estudio de la dinámica del fluido puede proporcionar resultados precisos en el comportamiento del sistema físico [1].

También es interesante el hecho de que fluidos bidimensionales y tridimensionales tienen un comportamiento cuantitativamente diferente. En flujos tridimensionales, la energía normalmente fluye desde estructuras de gran escala a las de menor escala hasta que se disipa debido a la viscosidad del fluido, conociéndose este hecho como “Cascada de Energía”. Sin embargo, en dos dimensiones el fenómeno tiende a invertirse, y la energía se concentra en unas pocas estructuras de tipo vórtice, conociéndose este hecho como “Cascada Inversa de Energía”, donde se observa la coalescencia de muchos vórtices pequeños dentro de un pequeño número de vórtices más grandes.

1.1 Experimentación.

Las estructuras de vorticidad se observan comúnmente en flujos complejos, y como dictan las leyes de vorticidad de Helmholtz para un flujo sin fronteras, una línea de vorticidad debe cerrarse sobre sí misma. Topológicamente, la estructura tridimensional más simple es el anillo de vorticidad.

La forma más habitual de generar anillos de vorticidad en el laboratorio es utilizando un sistema cilindro-pistón como se muestra en los esquemas de las figuras 1.1.1. y 1.1.2. De esta forma se puede investigar el proceso de formación de anillos de vorticidad para un amplio rango de ratios $\frac{L}{D}$, carrera del pistón-diámetro del cilindro.

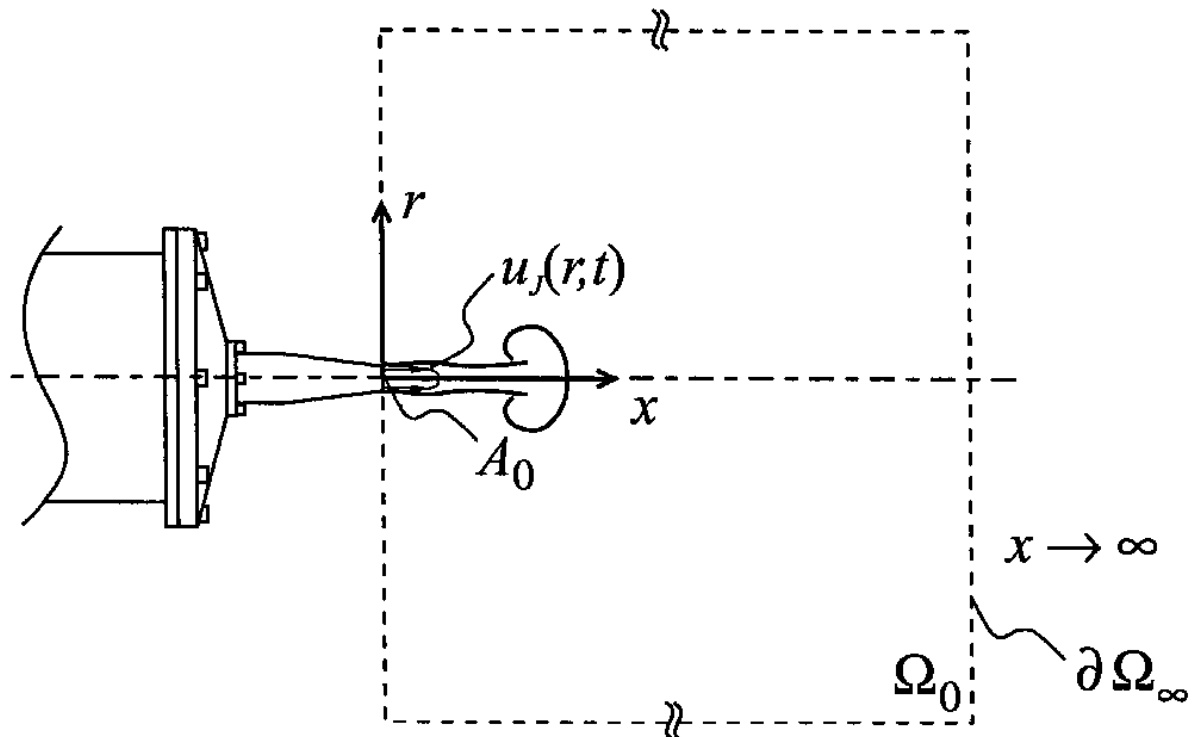


Figura 1.1.1. Esquema del sistema de inyección.

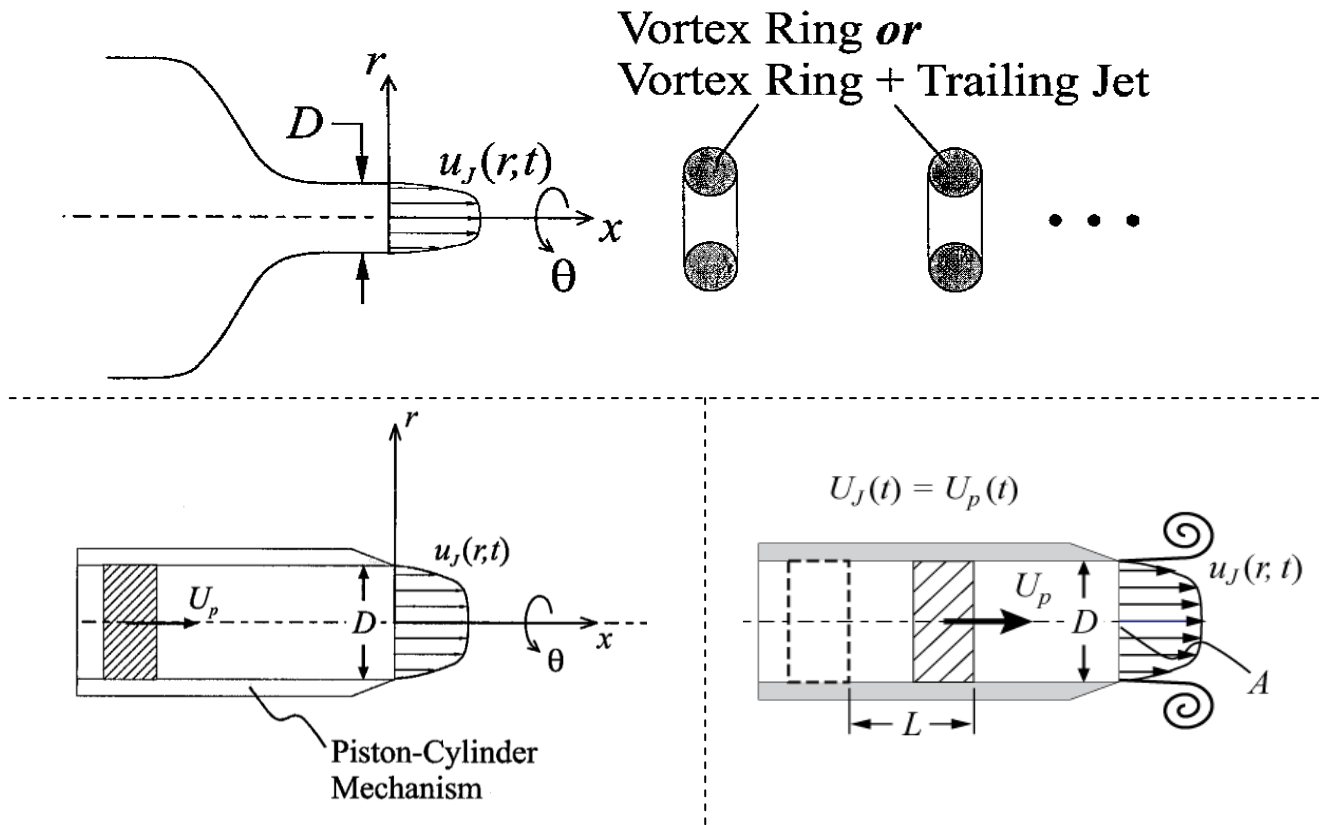


Figura 1.1.2. Detalle del sistema de inyección.

Los anillos de vorticidad son generados experimentalmente inyectando un fluido a través de una boquilla de borde afilado o a través de un agujero en un muro rígido. La vorticidad generada junto a las paredes se separa de la cola y se enrolla formando un anillo toroidal de vorticidad. Inyectando tanto humo en aire, como tinte en agua, el anillo se hace visible. Esta técnica de visualización fue muy difundida en publicidad a través de los anillos de humo generados por la valla publicitaria de los cigarrillos Camel en Times Square en Nueva York (ver figura 1.1.3).

No obstante, la interpretación del tinte requiere cierta precaución, ya que el flujo es viscoso y la vorticidad se difunde mucho más rápido que el tinte. Por ejemplo, el tinte puede mostrar una estructura en espiral, mientras que la distribución correspondiente de vorticidad es una Gaussiana.

Un anillo de vorticidad se caracteriza por su radio, velocidad de traslación, y circulación. En un experimento, debemos relacionar los parámetros asociados con los aparatos (el diámetro de la boquilla, la variación en la velocidad del pistón, y la carrera del mismo) con aquellos relativos al anillo. En el trabajo de *Gharib et al.* [2] se detalla la relación entre estos parámetros, tomando medidas de la velocidad y circulación del flujo entre otras.



Figura 1.1.3. Uso de los anillos de vorticidad en el campo de la Publicidad.

Por otra parte, cuando existe una diferencia de densidades entre el fluido del chorro y el fluido ambiente, aparecen las fuerzas de flotabilidad.

La flotabilidad en la inyección de chorros se genera cuando el fluido que es inyectado de forma continua y a cierta velocidad, se descarga en un ambiente en reposo donde la diferencia de densidades entre ambos fluidos es pequeña. Los elevados gradientes que tienen lugar en la interfase del chorro y el fluido ambiente, lo hacen altamente inestable provocando la rotación del chorro. Los vórtices generados absorben el fluido ambiente en el chorro, causando los procesos de mezclado y la disipación de energía.

La flotabilidad debida a inhomogeneidades en la densidad bajo la influencia de la gravedad, juega un papel importante en el desarrollo del flujo de chorros, a la vez que tiene un amplio abanico de aplicaciones prácticas. Las inhomogeneidades en la densidad pueden ser el resultado de una distribución no homogénea de la temperatura, de diferencias en la concentración de las especies químicas, cambios en la fase de los materiales, y muchos otros efectos del campo fluido.

Diversos autores a la hora de analizar la energía e impulso total del chorro también utilizan el mecanismo cilindro-pistón para la generación de anillos de vorticidad. Estas dos magnitudes, como veremos posteriormente, guardan relación con aplicaciones en la propulsión.

Autores como *Gharib et al.* [2] y *Krueger and Gharib* [3], realizaron análisis de chorros inyectados, obteniendo resultados en cuanto a la evolución del empuje frente al ratio $\frac{L}{D} \equiv \frac{\text{carrera pistón}}{\text{diámetro cilindro}}$ (ver figura 1.1.2). Los resultados obtenidos son mostrados en la figura 1.1.4.

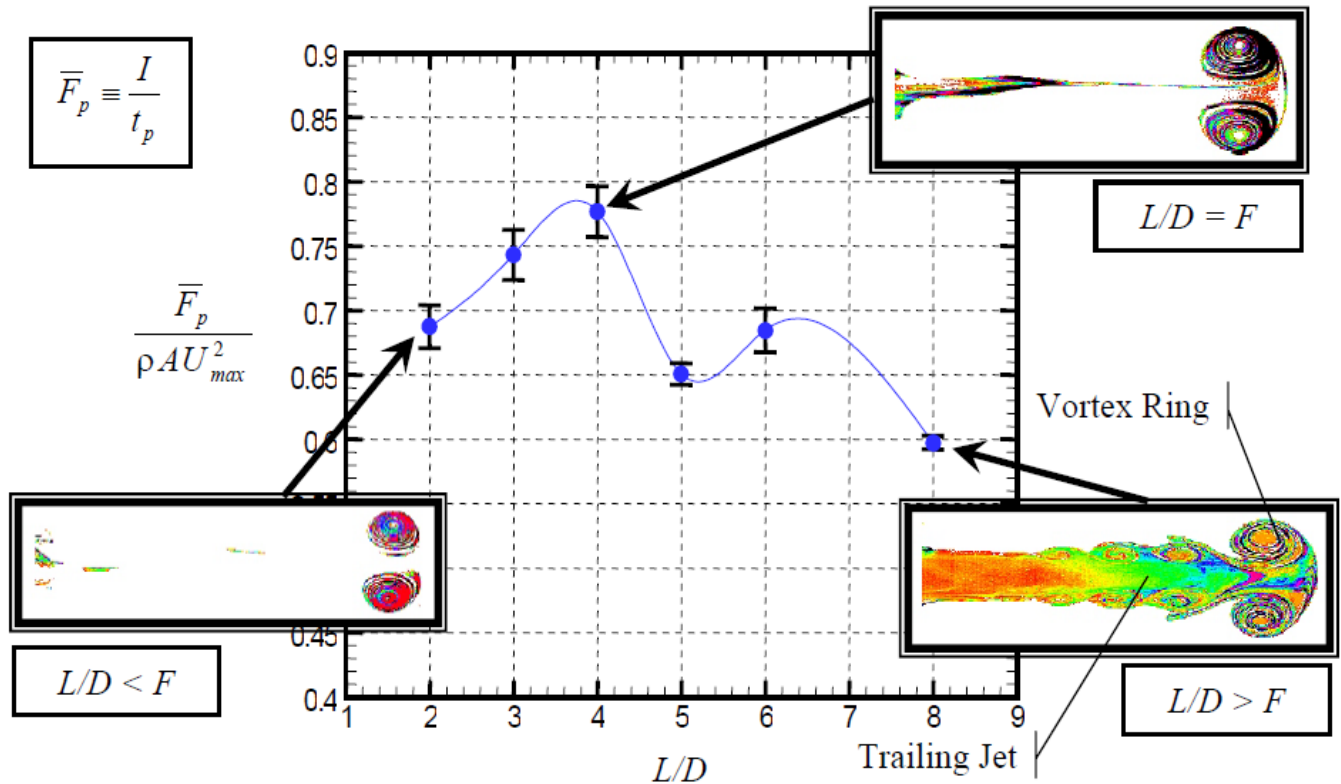


Figura 1.1.4. Evolución del empuje medio adimensional frente al número de formación.

Como se observa en la figura 1.1.4, el empuje medio generado, \bar{F}_p , es el cociente entre el impulso, I , y el tiempo de inyección, t_p . Cuando el ratio $\frac{L}{D}$ es menor que el número de formación, F , el vórtice principal no llega a desarrollarse por completo no alcanzando el máximo valor del empuje. Sin embargo, para ratios en torno al número de formación $F \sim 4$, el empuje medio observado es máximo, observándose un vórtice principal completamente desarrollado en ausencia de un chorro de cola. Para ratios mayores al número de formación el empuje medio vuelve a descender observándose el efecto del chorro de cola.

A lo largo del proyecto se realizará un análisis más detallado de todo el proceso involucrado tanto en la formación del vórtice principal, como en la evolución de la energía y el impulso durante la inyección continua del chorro.

1.2 Motivación y aplicaciones.

El presente proyecto surge con la motivación inicial de describir, analizar y evaluar la descarga de chorros en el interior de otro fluido distinto en presencia de la acción de la gravedad. En base a estos objetivos, a lo largo del proyecto se proporcionan al lector los conocimientos necesarios que le permitan seguir adecuadamente los razonamientos llevados a cabo.

Debido a la complejidad existente tanto en el estudio de los fluidos, como en la dinámica de los mismos y el aparataje necesario para la realización del proyecto y toma de medidas, el presente proyecto trata el estudio de la descarga de chorros mediante simulación numérica realizada a través del programa Fluent.

Debido a lo expuesto anteriormente, fundamentado en la complejidad inherente a la fluidodinámica, el presente proyecto sentará las bases teóricas y conceptuales, mostrando y analizando los resultados obtenidos, de forma que al finalizar la lectura del mismo hayamos obtenido los conocimientos necesarios para afrontar aplicaciones más complejas como las que a continuación se detallan.

Los modelos de anillos de vorticidad se aplican bien a un amplio rango de flujos en fluidos. Por ejemplo, el movimiento de un pez al nadar genera estelas de vorticidad durante una rápida maniobra que se asemeja a dos anillos de vorticidad distintos. Una hélice marina formará una estructura de vorticidad durante el arranque no estacionario que se asemeja a un anillo de vorticidad. Estructuras tipo anillo de vorticidad son bastante frecuentes en la propulsión biológica, existiendo ciertos autores que sugieren que la formación óptima de un anillo de vorticidad debe ser el principio motor para el diseño biónico de sistemas de propulsión.

Continuando con las aplicaciones en el mundo marino, ciertos cefalópodos y medusas utilizan un complejo sistema locomotor que implica dos sistemas diferenciados: un chorro pulsado y el movimiento de las aletas laterales. Un organismo al nadar o volar, genera fuerzas locomotoras mediante la transferencia de momento a la estela del fluido, lo cual es a menudo caracterizado por vórtices diferenciados. El momento asociado con estos vórtices puede ser utilizado para estimar las fuerzas locomotoras. En función del organismo que se estudie, se puede observar que a bajas velocidades, el chorro pulsado genera las principales fuerzas locomotoras en cuanto a empuje e incremento de la velocidad, mientras que las aletas juegan un papel importante en cuanto a estabilidad, y a menudo resistencia. A medida que la velocidad del organismo aumenta, las aletas van produciendo fuerzas hidrodinámicamente relevantes al compararse con el chorro pulsado, generando sustentación, empuje, y/o resistencia, en varios grados, dependiendo de la velocidad y orientación a la que se mueva [4].

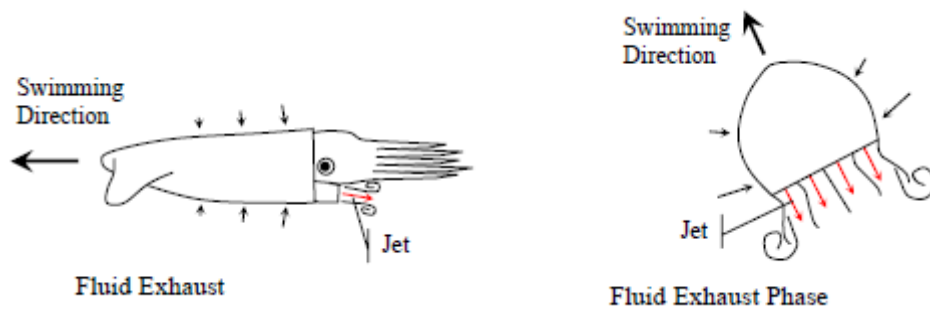


Figura 1.2.1. Mecanismo de actuación de chorros en cefalópodos y medusas.

Tal y como se indica en [5], el chorro pulsado puede proporcionar en valor medio, un mayor empuje que un chorro continuo de equivalente flujo másico, si los pulsos son lo suficientemente frecuentes para que la distancia entre los centros de los anillos sea menor que tres veces el radio del anillo. Sin embargo, tal mecanismo de mejora del empuje carece de importancia en cefalópodos con pequeños orificios y bajas frecuencias de expulsión de chorro, debido a la ausencia de interacciones entre anillos.

Con el descubrimiento del número de formación de anillos de vorticidad, surge una interesante pregunta: ¿Pueden los organismos propulsados mediante chorro, tales como los cefalópodos, utilizar el número de formación de los anillos de vorticidad para mejorar su eficiencia en la propulsión? Los análisis teóricos y prácticos (ver figura 1.1.4), establecen que un anillo de vorticidad producido utilizando el ratio carrera-diámetro, de pistón y cilindro, más alto posible para la formación de un único anillo de vorticidad, contiene el mayor impulso para una energía cinética dada. Si el anillo es expulsado detrás de un cuerpo flotante, produce el máximo empuje, equivalente a la más alta eficiencia de propulsión.

Autores como *Krueger et al.* [6], hacen hincapié en el estudio de la expulsión repentina de un chorro con cada pulso, para evaluar sus efectos en la formación de anillos de vorticidad. Si el pulso es demasiado largo, el anillo de vorticidad dejará de formarse y el resto del pulso será expulsado en forma de chorro de cola. Varios estudios realizados sobre chorros pulsados generados mecánicamente han demostrado que los anillos de vorticidad producen un aumento del empuje a través de la aceleración del fluido ambiente. Este efecto es más pronunciado en pulsos cortos sin chorro de cola. Recientes medidas realizadas sobre vehículos autopropulsados por chorro pulsado han mostrado ventajas en la velocidad de cruce obtenida mediante pulsos.



Figura 1.2.2. Vórtices creados en los flaps de aviones.

El estudio de la energía en los vórtices siempre ha sido un tema de gran interés en la investigación científica. En concreto, el por qué del lento decaimiento de la energía en los vórtices ha sido un misterio durante mucho tiempo. Un ejemplo de vórtices en los que se observa un lento descenso de la energía, es en los vórtices creados en la punta del ala de un avión, figura 1.2.2. Es sabido que estos vórtices también ocurren en las pistas de los aeropuertos y permanecen allí durante un tiempo, haciendo peligrosa la pista para otros aviones.

En las investigaciones meteorológicas es habitual encontrar vórtices, como por ejemplo la presencia de los vórtices de von Karman en el viento detrás de las islas, figura 1.2.3, los cuales pueden tener efectos tanto en la climatología local como en la vida marina.

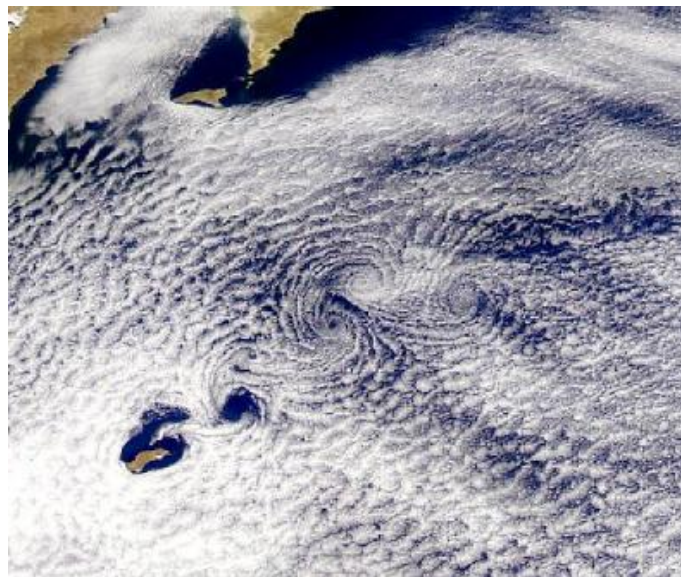


Figura 1.2.3. Vórtices creados en por el viento detrás de islas.

Como se indica en [7], una forma de ampliar el alcance del conocimiento en la dinámica atmosférica se realizó a través de la incorporación de las técnicas e ideas de otras disciplinas científicas relacionadas, tales como la turbulencia de fluidos y la dinámica de sistemas.

Dentro del campo de la meteorología, estamos familiarizados con el concepto de tormentas naturales como por ejemplo los tornados tropicales, donde se produce una fuerte rotación comúnmente asociada con la vorticidad y la vorticidad potencial. Como se verá en el proyecto, la medida local de la rotación en un fluido puede ser cuantificada tanto por la vorticidad, como por la circulación asociada a la misma. La importancia de la circulación y la vorticidad en los sistemas atmosféricos fue reconocida por Carl G. Rossby (1939) al describir de forma breve y concisa, los aspectos más ubicuos de las circulaciones atmosféricas a gran escala en las latitudes medias, mediante un análisis sencillo de las ecuaciones que gobiernan la vorticidad.

Por último, también encontramos aplicaciones del estudio de los vórtices en el campo de la bioingeniería médica, como es el estudio de la importancia de los vórtices en la generación de la voz o durante la entrada de sangre en el corazón.

Como se indica en [8], la generación de la voz en la laringe se debe principalmente al flujo pulsante a través de la glotis, generado por la vibración pasiva de los pliegues vocales, figura 1.2.4. Además, la vorticidad puede ser generada en la región de aguas abajo, donde la glotis adquiere rápidamente una configuración divergente, lo que provoca una caída de la presión a través de la glotis. El estudio de los vórtices es de interés porque pueden generar presiones significativas, tanto positivas como negativas, pudiendo ser fuentes de sonido. Los vórtices generados en la glotis, ocurren durante la última parte del cerrado de los pliegues vocales, jugando un papel importante en el rápido cerrado de los mismos, en la reducción del flujo y en parámetros que influyen en la calidad de la voz, el nivel de intensidad o la frecuencia fundamental. La reducción de los vórtices ocurre en condiciones tales como una rigidez asimétrica en los pliegues vocales. Dicha reducción de los vórtices puede afectar a la vibración y por consiguiente a la calidad de la voz. Investigaciones en esta línea conducirán a mejoras en el diagnóstico y tratamiento de ciertas afecciones de la voz.

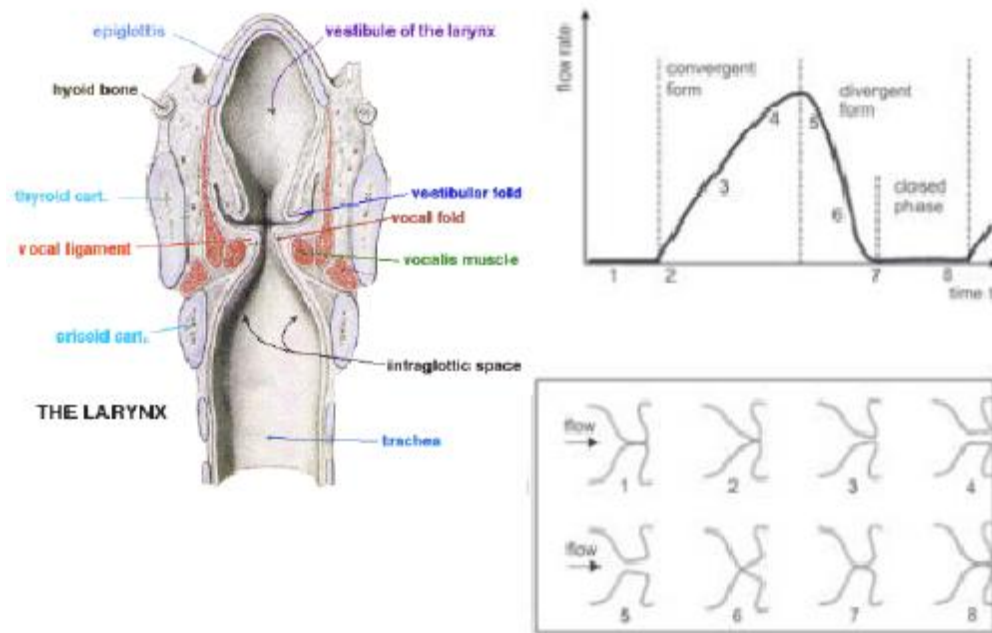


Figura 1.2.4. Esquema de la laringe. Vórtices en la bioingeniería médica.

En cuanto a la relación entre los anillos de vorticidad y el corazón humano, se puede indicar que la formación de vórtices en diferentes áreas del interior del corazón, tiene un significado fisiológico y clínico. La presencia de estructuras de flujos con vorticidad, desarrollados en el interior de las diferentes cavidades cardíacas, muestran una correlación con el estado funcional del corazón, afectando a la eficiencia en el bombeo cardíaco.

Finalmente, aunque no por ello menos interesante, cabe mencionar que recientemente los anillos de vorticidad también se están utilizando en el campo del entretenimiento para crear una realidad virtual. Se está estudiando el uso de cañones de aire como medio para la creación de muestras olfativas, de forma que se puedan enviar olores encapsulados en anillos de vorticidad dirigidos a personas. En un cine o un teatro, la realidad virtual se crea únicamente mediante imágenes y sonidos, sin embargo, se puede mejorar esta realidad incorporando el tacto y el olfato mediante cañones de aire sincronizados con la imagen y el sonido, experimentando de esta forma un impacto directo y al mismo tiempo una sensación de frescura.

Capítulo 2

Definición del proyecto

2.0 Introducción.

El presente proyecto estudia la cinemática y dinámica de chorros laminares transitorios. El estudio debe garantizar que los resultados derivados del mismo son fiables y extrapolables tanto a proyectos ya realizados, como a futuros proyectos. Por tanto, este proyecto se ha llevado a cabo bajo unas condiciones geométricas y de contorno determinadas, que analizaremos a lo largo del *Capítulo 2*.

El objetivo de este capítulo, es proporcionar una visión general y esquemática de cómo está planteado el proyecto y bajo qué condiciones y parámetros iniciales se desarrolla.

En último lugar, y como parte de las propiedades características bajo las que se realiza el proyecto, se indican las propiedades de los fluidos implicados. No obstante una información más amplia acerca de todo lo referente a la implementación en Fluent de los diferentes fluidos utilizados para cada caso de estudio, se encuentra detallada en el *Anexo A*.

2.1 Descripción del proyecto.

La base sobre la que se desarrolla este proyecto, es el estudio de la evolución de un chorro laminar transitorio en el interior de un fluido sin fronteras. Por lo tanto, y debido a que es necesario integrar las ecuaciones en un volumen finito, se define un volumen de control que incluya la entrada del chorro, y que tenga unas características en sus fronteras que reproduzcan fielmente las condiciones en las que se va a desarrollar el proyecto. En adelante también nos referiremos a este volumen de control como ambiente, cuyas características se describen más adelante haciendo uso de las figuras 2.1.1 y 2.1.2.

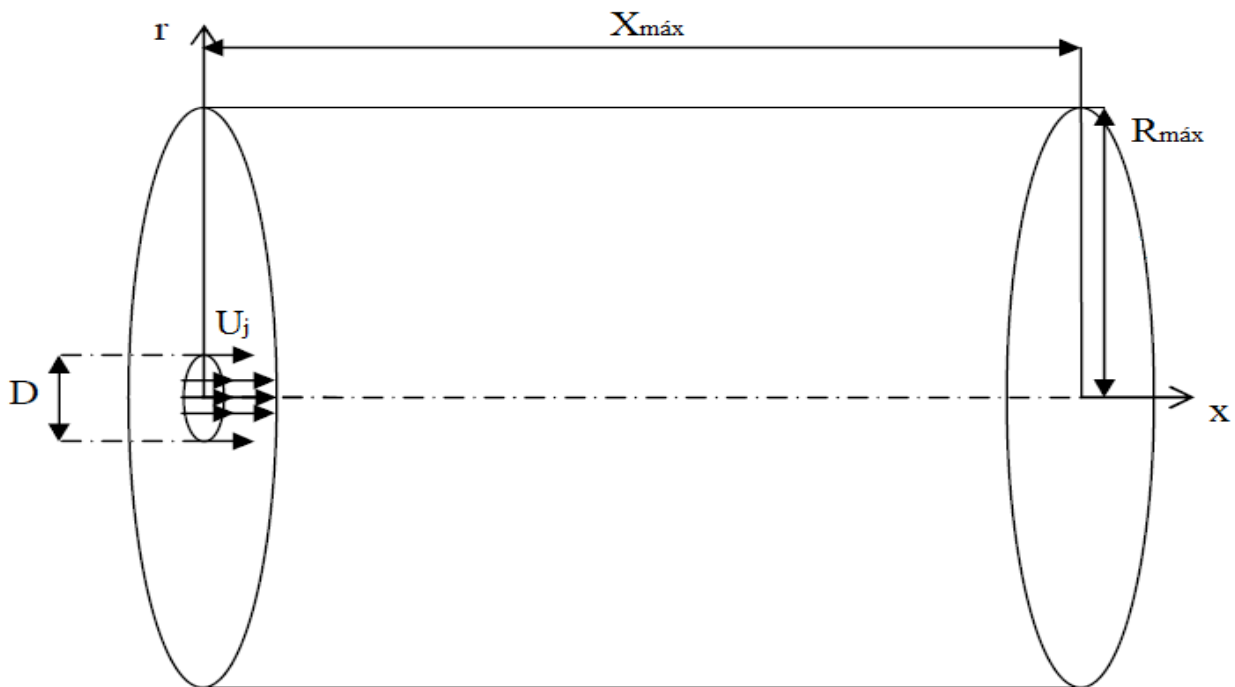


Figura 2.1.1. Esquema del volumen de control.

El chorro que va a ser objeto de estudio, se inyecta a través de un orificio de diámetro, D , que descarga sobre un ambiente en el cual se llevarán a cabo todas las medidas.

El chorro consiste en un fluido incompresible que en el instante en que penetra en el volumen de control lo hace con una velocidad uniforme, U_j , y con un perfil de velocidad también uniforme a lo largo del orificio de entrada, como puede observarse en la figura 2.1.3, donde se muestra la distribución del número de Reynolds en el orificio de entrada. De esta manera no se registran gradientes de velocidad producidos fuera del ambiente.

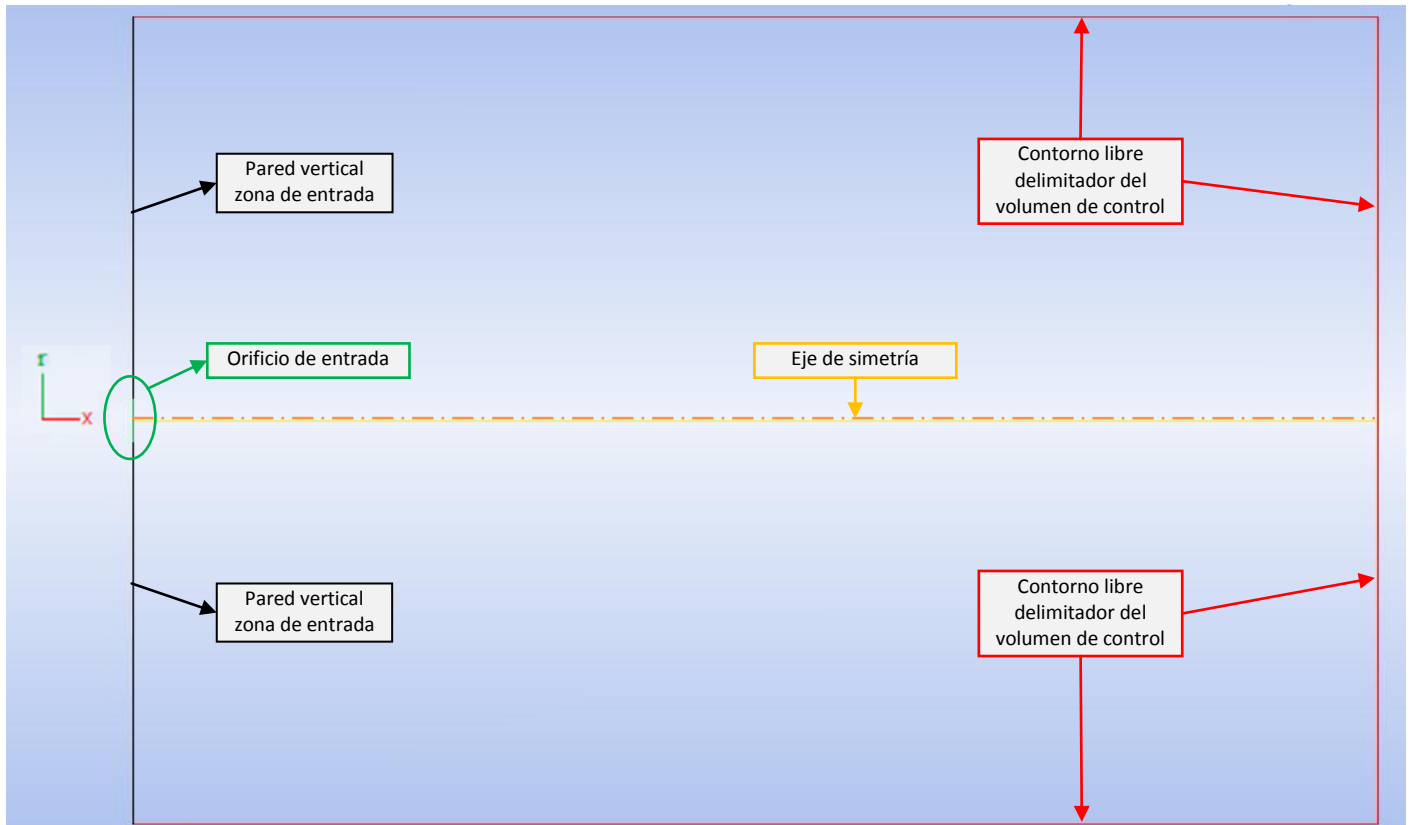


Figura 2.1.2. Zonas del volumen de control.

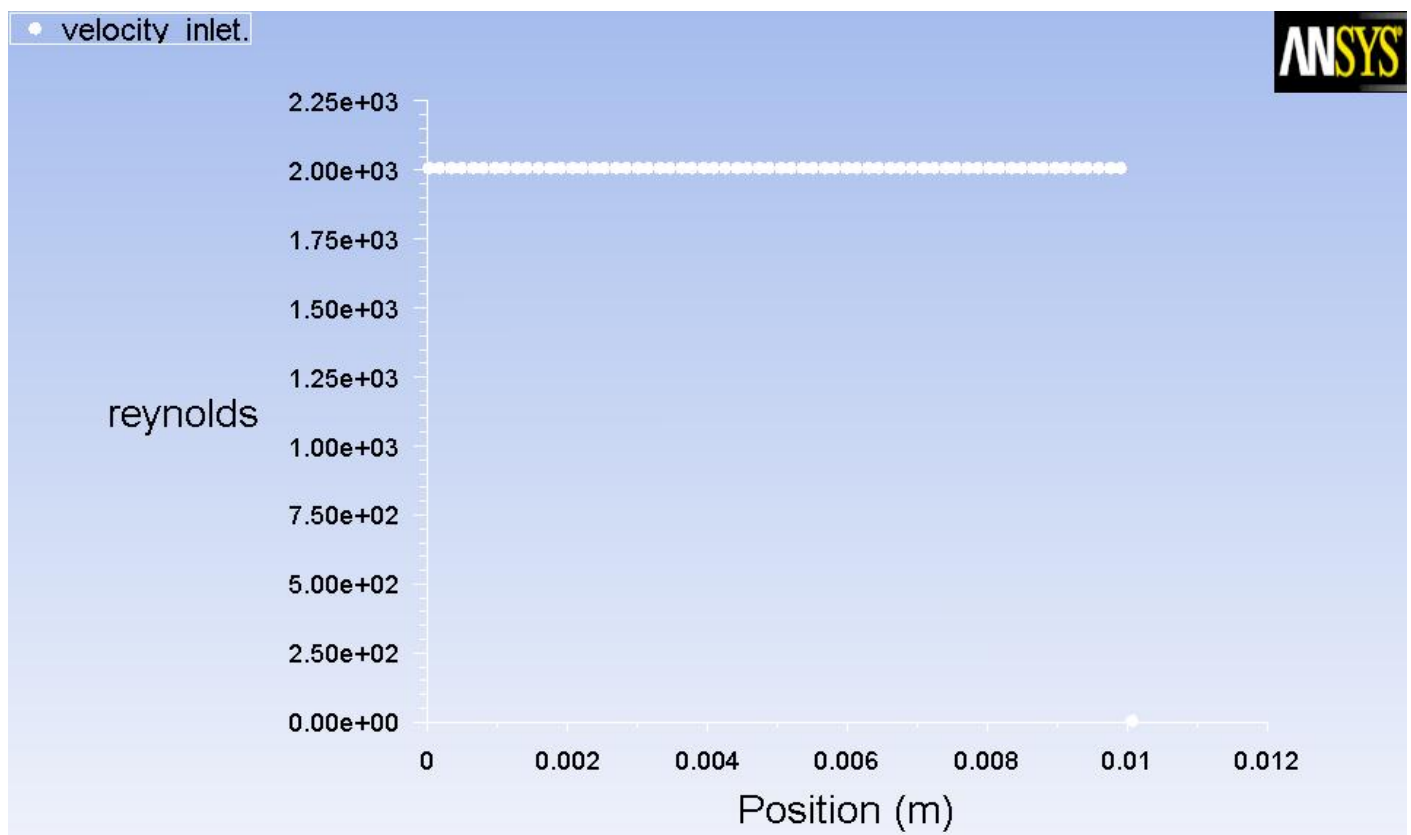


Figura 2.1.3. Distribución número de Reynolds en el orificio de entrada.

Los fluidos que componen el chorro y el ambiente son transparentes, miscibles y con un índice de refracción similar. Estas tres últimas condiciones vienen impuestas por la realización práctica en laboratorio del mismo proyecto, y por tanto, de los aparatos de medida, de forma que se pueda reproducir el mismo estudio en cualquier otro laboratorio.

El volumen de control está formado por un fluido incompresible que se encuentra en reposo en el instante inicial y que posee las mismas características previamente indicadas en cuanto a transparencia, miscibilidad e índice de refracción.

Como se indicó anteriormente, el ambiente representa un fluido sin fronteras, sin embargo, al tener que realizarse el estudio sobre un volumen de control finito, deberemos imponer unas condiciones en la frontera del volumen de control que reproduzcan este hecho, creando así los contornos libres.

Una de las condiciones que deben poseer los contornos libres es que se encuentren lo suficientemente alejadas del chorro como para que no interfieran en la evolución del mismo, lo cual puede observarse en la figura 2.1.2. Además, se impone una condición en los contornos libres, de no existencia de gradientes de presión, de forma que el valor de la presión en la frontera es igual a la presión ambiente definida como presión atmosférica.

También debe tenerse en cuenta que el estudio se ha realizado bajo la existencia de gravedad en la dirección y sentido de la descarga del chorro, por lo que en función de si el fluido en ambas zonas, chorro y ambiente, tiene distinta o igual densidad, podremos observar o no los efectos de la gravedad.

Por tanto, de acuerdo a la existencia o no de una diferencia de densidades entre el chorro y el ambiente, surge la distinción entre los tres casos de estudio que se realizan en este proyecto:

- **Caso de estudio homogéneo:** se denomina de esta forma al caso de estudio en que tanto el chorro inyectado, como el volumen de control o ambiente, están formados únicamente por agua. De tal manera que los efectos de la gravedad no son apreciables.
- **Caso de estudio de flotabilidad negativa o de mezcla:** se denomina de esta forma a los casos de estudio en que el chorro inyectado está formado únicamente por agua, mientras que el volumen de control, o ambiente, está formado por una mezcla agua-alcohol etílico. De tal manera que en estos casos los efectos de la gravedad sí son apreciables.

Tal y como se analiza en el *apartado 2.2.1*, en el presente proyecto se llevan a cabo dos casos de mezcla distintos, correspondientes a dos combinaciones diferentes en cuanto a la mezcla agua-alcohol etílico del ambiente, caracterizadas por el número de Froude: $Fr = 5$ y $Fr = 10$.

De esta forma quedan definidas las condiciones generales sobre las que se desarrolla el proyecto, garantizando el correcto estudio del caso general que se plantea: estudio de un chorro laminar transitorio que evoluciona en el interior de un fluido sin fronteras.

2.2 Datos iniciales del proyecto.

En este apartado se describen los datos iniciales que definen la geometría del proyecto y las propiedades de los fluidos implicados.

En primer lugar, definimos los valores relativos a la geometría del proyecto, representados en la figura 2.1.1:

$$X_{m\acute{a}x} = 40 \text{ (cm)} \quad (2.2.1)$$

$$R_{m\acute{a}x} = 20 \text{ (cm)} \quad (2.2.2)$$

$$D = 2 \text{ (cm)} \quad (2.2.3)$$

En todos los casos de estudio, la velocidad de entrada se obtiene a partir del número de Reynolds (analizado en detalle en el *apartado 3.1.3*) el cual se fija en un valor $Re = 2000$, de tal forma que el chorro de agua inyectado sea laminar en todos los casos de estudio, y de velocidad de inyección, U_j :

$$U_j = \frac{\mu_j \cdot Re}{\rho_j \cdot D} = \frac{\nu_j \cdot Re}{D} \quad (2.2.4)$$

, indicándose con el subíndice j que se refiere al chorro de agua.

2.2.1 Características de los fluidos implicados.

En este apartado analizamos las propiedades de los fluidos implicados en los distintos casos de estudio. El chorro inyectado está compuesto únicamente por agua en todos los casos de estudio, por lo que las propiedades que caracterizan este fluido ya están definidas dentro del programa Fluent. En el caso de estudio homogéneo ocurre lo mismo para el fluido que se encuentra en el interior del volumen de control, al ser también agua.

Sin embargo, en los casos de estudio de mezcla, el fluido contenido en el interior del volumen de control está formado por una mezcla de agua y alcohol etílico. Las propiedades de dicha mezcla vienen determinadas por el número de Froude (analizado en el *apartado 3.1.3*):

$$Fr = \frac{U_j^2}{\hat{g}D} = \frac{U_j^2}{\left(\frac{\rho_j - \rho_{amb}}{\rho_j}\right)gD} \quad (2.2.5)$$

Mediante las ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5), se puede determinar la densidad de la mezcla contenida en el ambiente, ρ_{amb} :

$$\rho_{amb} = \rho_j \left(1 - \frac{U_j^2}{g \cdot D \cdot Fr} \right) \quad (2.2.6)$$

Una vez se dispone de la densidad de la mezcla para cada caso de estudio de mezcla, deberemos hacer uso de la tabla de propiedades de mezcla agua-alcohol etílico, que se encuentra en el *Anexo B*.

Utilizando dicha tabla, se realiza un ajuste lineal en torno a los valores de densidad de la mezcla obtenidos mediante la ecuación (2.2.6), para determinar la fracción másica de agua de la mezcla, o lo que es lo mismo, del ambiente:

$$Y_A^{F10} = Y_A(Fr = 10) = 97.2\% \quad (2.2.7)$$

$$Y_A^{F5} = Y_A(Fr = 5) = 94.2\% \quad (2.2.8)$$

A continuación en la figura 2.2.1, mostramos los valores de la densidad y la viscosidad dinámica de la mezcla agua-alcohol etílico, en función de la fracción másica de agua.

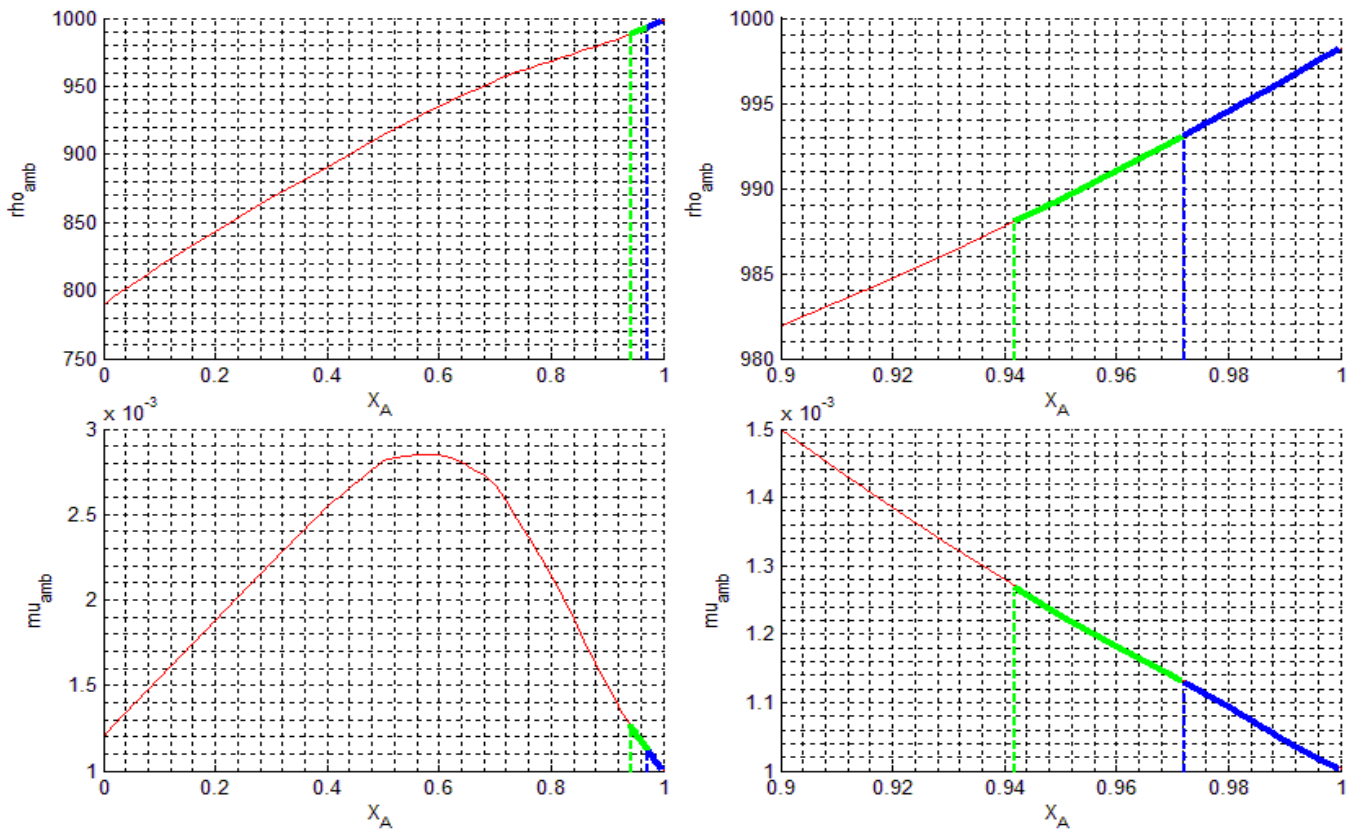


Figura 2.2.1. Evolución de la densidad y viscosidad dinámica en función de la fracción másica de agua, en una mezcla agua-alcohol etílico.

Como se puede observar en la figura 2.2.1, se ha marcado en azul el rango de valores que pueden tomar la densidad y la viscosidad dinámica para el caso de mezcla $Fr = 10$. Mientras que para el caso $Fr = 5$, el rango de valores que pueden tomar la densidad y la viscosidad dinámica incluye los valores marcados en azul y los marcados en verde.

Como se deduce de la gráfica 2.2.1, el chorro de agua inyectado se comporta como un fluido más pesado en el caso de mezcla $Fr = 5$, en comparación con el caso $Fr = 10$, debido a que la densidad del ambiente, o lo que es lo mismo, la densidad de la mezcla agua-alcohol etílico tiene una densidad menor en el caso $Fr = 5$.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la densidad y viscosidad dinámica en función de la fracción másica de agua para cada caso de mezcla son las siguientes:

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 10: \quad \rho_{amb} = 183.2 \cdot [Y_A^{F10} + (1 - Y_A^{F10}) \cdot Y_A] + 814.57 \quad (2.2.9)$$

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 10: \quad \mu_{amb} = -0.0046 \cdot [Y_A^{F10} + (1 - Y_A^{F10}) \cdot Y_A] + 0.0056 \quad (2.2.10)$$

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 5: \quad \rho_{amb} = 174.73 \cdot [Y_A^{F5} + (1 - Y_A^{F5}) \cdot Y_A] + 823.35 \quad (2.2.11)$$

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 5: \quad \mu_{amb} = -0.0046 \cdot [Y_A^{F5} + (1 - Y_A^{F5}) \cdot Y_A] + 0.0056 \quad (2.2.12)$$

En las ecuaciones (2.2.9) a (2.2.12), la variable Y_A , es la fracción másica de agua en un punto del volumen de control. Dichas ecuaciones están adaptadas de tal forma que son compatibles con la forma en que operamos con el programa Fluent.

Cuando se definen en el programa Fluent los casos de mezcla, se indican los componentes que están presentes en el volumen de control y las leyes que van a regir el comportamiento de las propiedades en las zonas de mezcla, ecuaciones (2.2.9) a (2.2.12). En los casos de mezcla estudiados, el volumen de control está formado únicamente por la mezcla binaria agua-alcohol etílico, en las proporciones marcadas por el número de Froude.

La forma en que trabajamos con el programa Fluent, asigna a un punto cualquiera del ambiente, una fracción másica de agua igual a cero cuando dicho punto está formado únicamente por la mezcla binaria. Por tanto, las ecuaciones (2.2.9) a (2.2.12) expresan este hecho, obteniendo los valores de densidad y viscosidad dinámica coloreados en la figura 2.2.1 para los rangos adecuados de fracción másica de agua, Y_A , entendible por el programa Fluent.

Estas leyes de variación de las propiedades de la mezcla, están implementadas en Fluent mediante lenguaje de programación C, que hace uso de las funciones “mixture_density” y “mixture_viscosity” incluidas en el *Anexo E*.

Capítulo 3

Desarrollo del proyecto

3.0 Introducción.

En este *Capítulo 3* se desarrolla principalmente el análisis teórico del proyecto, que ya se comenzó a describir en el *Capítulo 2*, pero que en los próximos apartados abordamos en detalle.

En primer lugar se realiza un planteamiento de las ecuaciones, exponiendo las características geométricas y propiedades de los fluidos comunes en los tres casos de estudio. Posteriormente, se describe la forma de resolución general de los casos de estudio, planteando las ecuaciones de conservación que los definen, así como las condiciones iniciales y de contorno necesarias para obtener la solución relativa a nuestros casos de estudio.

Como se explicó en el *Capítulo 2*, los tres casos de estudio pueden agruparse en un caso homogéneo y dos casos de mezcla, por lo que en este capítulo se plantean las ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno, particularizadas según el caso de estudio que se considere, aplicando también la simetría axial característica.

En segundo lugar, se analizan teóricamente los parámetros de análisis seleccionados para caracterizar y realizar el seguimiento de la evolución del chorro en el interior del volumen de control.

Por último cabe mencionar que la implementación en el programa Fluent de las ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno se describe en el *Anexo A*, mientras que para el caso de los parámetros de estudio, al estar relacionada la implementación en Fluent con el significado teórico de dichos parámetros, se ha incluido dentro de cada apartado. No obstante, debido a que los parámetros de análisis se implementan en lenguaje de programación C, en el *Anexo E* se dispone del código en dicho lenguaje.

3.1 Planteamiento de las ecuaciones.

Una vez definidos en el *Capítulo 2* los tres casos de estudio que se van a llevar a cabo, así como las propiedades de los fluidos que conforman estos tres casos, en este apartado nos centraremos en el planteamiento de las ecuaciones que van a describir el movimiento de los mismos.

En primer lugar, se analizan las características comunes que definen los tres casos de estudio.

- Consideramos que todo el fluido ocupa un dominio tridimensional, y asumimos la hipótesis del continuo que dice que en cada punto de este dominio hay fluido.
- El flujo considerado es transitorio, y para cada tiempo t , las partículas del fluido tienen una correspondencia biyectiva con las coordenadas definidas en el dominio.
- Los tres casos de estudio tienen una simetría axial, siendo el eje del chorro inyectado, o eje x , el eje de simetría. Por tanto, a la hora de plantear las ecuaciones podremos utilizar las coordenadas cilíndricas, y además, simplificar los casos de estudio considerándolos bidimensionales a la hora de realizar los cálculos. El análisis de los tres casos de estudio se puede realizar considerando una superficie bidimensional, $\theta \equiv cte$, al ser únicamente en las coordenadas x y r donde se registran las variaciones de las distintas propiedades.
- En base a lo anterior podemos caracterizar el fluido por las siguientes funciones: campo de velocidades, $u(x,r,t)$, presión, $P(x,r,t)$ y densidad, $\rho(x,r,t)$.
- Los fluidos implicados son incompresibles, por lo que la densidad de un elemento fluido no cambia al moverse junto con el fluido.
- Los casos estudiados y los materiales utilizados no producen ningún tipo de reacción química en su evolución en el interior del ambiente.
- Consideramos que en los tres casos de estudio no se producen variaciones significativas de la temperatura que afecten a la dinámica del chorro, por lo que los tres casos son considerados isotermos.

3.1.1 Ecuaciones generales.

Mediante las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles y con efecto de la viscosidad, podremos calcular la evolución de las funciones que caracterizan el fluido, anteriormente mencionadas, teniendo en cuenta las condiciones bajo las que se desarrolla el proyecto.

A continuación se escribe la ecuación de continuidad en su forma general, particularizando para cada caso de estudio más adelante en los *apartados 3.1.4 y 3.1.5*:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\bar{u}) = 0 \quad (3.1.1)$$

Como hemos comentado anteriormente, los fluidos implicados son incompresibles, por lo que:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (3.1.2)$$

Debe notarse que existen dos formas de interpretar el fluido, una de ellas es la versión de Euler, en la que se coloca un sistema de coordenadas fijo en base al cual se referencian los cálculos; y la segunda, es la versión Lagrangiana, basada en utilizar un sistema de coordenadas que se mueve junto al elemento de volumen fluido $\left(\frac{D(\cdot)}{Dt}\right)$. En este proyecto se utilizará una versión u otra en función de las características del parámetro que estemos analizando.

Además del balance de masa representado en la ecuación (3.1.1), las ecuaciones de Navier-Stokes, definen el balance de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot (\nabla\bar{u}) \right] = -\nabla P + \nabla \bar{\tau}' + \bar{f}_{ext} \quad (3.1.3)$$

, siendo \bar{f}_{ext} , igual a las fuerzas externas, que para todos los casos de estudio serán las fuerzas de flotabilidad provocadas por el efecto de la gravedad, como consecuencia de la diferencia de densidades entre el chorro y el ambiente:

$$\bar{f}_{ext} = (\rho - \rho_{amb}) \cdot \bar{g} \quad (3.1.4)$$

En la ecuación (3.1.3), $\nabla \bar{\tau}'$ representa el tensor de esfuerzos viscosos, que para los casos que nos ocupan en los que la viscosidad dinámica, μ , es constante, es igual a:

$$\nabla \bar{\tau}' = \mu \left(\Delta\bar{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) \right) \quad (3.1.5)$$

La ecuación (3.1.5) está formada por un primer sumando que se relaciona con los cambios de forma, mientras que el segundo sumando, relacionado con el cambio de volumen, desaparece debido a la incompresibilidad de los fluidos implicados, ecuación (3.1.2).

Por tanto, la ecuación general de cantidad de movimiento (3.1.3) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot (\nabla\bar{u}) \right] = -\nabla P + \mu(\nabla \cdot \nabla)\bar{u} + (\rho - \rho_{amb})\bar{g} \quad (3.1.6)$$

Al mismo tiempo, aunque la ecuación (3.1.6) será la que se utilice para describir el movimiento del fluido, se quiere remarcar la importancia de la vorticidad, $\bar{\omega}$, uno de los parámetros de análisis que más adelante en el apartado 3.2.4, se analizará en detalle. Se observa que al trabajar con fluidos incompresibles, la ecuación (3.1.5) puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\nabla \bar{\tau} = \mu[\Delta \bar{u}] = \mu[\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u})] = -\mu \nabla \times (\bar{\omega}) \quad (3.1.7)$$

He incorporando esta nueva definición del tensor de esfuerzos viscosos en la ecuación de cantidad de movimiento (3.1.3) tenemos:

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot (\nabla \bar{u}) \right] = -\nabla P - \mu \nabla \times (\bar{\omega}) + (\rho - \rho_{amb}) \bar{g} \quad (3.1.8)$$

Por tanto, de las ecuaciones (3.1.7) y (3.1.8) se deduce que para un fluido incompresible, los efectos de los esfuerzos viscosos vienen dados por el rotacional de la vorticidad. De acuerdo con esto, se muestra que el concepto de vorticidad no sólo es importante cuando se describe un flujo no viscoso, sino que también es importante cuando se investigan los efectos de la viscosidad.

Por último, únicamente queda por definir la ecuación que rige el movimiento de las especies químicas y escalares pasivos involucrados en los casos de estudio, denominada ecuación de conservación de las especies químicas:

$$\frac{D}{Dt}(\rho Z_i) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho Z_i) + \nabla \cdot (\rho Z_i \bar{u}) = \rho D_i \Delta Z_i \quad (3.1.9)$$

, donde Z_i , hace referencia a la especie química o escalar pasivo, según el caso de estudio que se considere. Debe tenerse en cuenta, que en la ecuación (3.1.9) la velocidad, \bar{u} , representa la velocidad de la especie i . Sin embargo, al existir un fluido que predomina sobre el resto, podemos aplicar la Ley de Fick, de forma que el coeficiente de difusión, D_i , es la difusividad de la especie i en el fluido mayoritario de la mezcla.

Posteriormente, en los *apartados 3.1.4 y 3.1.5* se particulariza la ecuación (3.1.9) para cada caso de estudio.

3.1.2 Condiciones iniciales y de contorno.

Una vez planteadas las ecuaciones que definen el movimiento de los fluidos, es necesario especificar las condiciones propias de nuestros casos de estudio de forma que podamos integrar las ecuaciones.

Al tratarse de un flujo no estacionario, es necesario conocer las condiciones en las que se encuentra el campo fluido en el instante inicial. En todos los casos de estudio las condiciones iniciales son las mismas.

Para todo el volumen de control definido en el *Capítulo 2*, las condiciones iniciales son:

$$u(x, r, 0) = 0 \quad (3.1.10)$$

$$P(x, r, 0) = P_{amb} \quad (3.1.11)$$

$$\rho(x, r, 0) = \rho_{amb} \quad (3.1.12)$$

$$Z_i(x, r, 0) = 0 \quad (3.1.13)$$

De acuerdo con las ecuaciones (3.1.10) a (3.1.13), en el instante inicial todo el volumen de control se encuentra parado, a una presión igual a la presión ambiente y con una concentración nula de especies químicas, o escalares pasivos, en función del caso de estudio en que nos encontremos.

Finalmente, debemos describir las condiciones en que se encuentran los límites del volumen de control considerado. Debido a la simetría axial de los casos de estudio, representamos en la figura 3.1.1, las zonas que delimitan el volumen de control y a continuación las condiciones de contorno en cada zona.

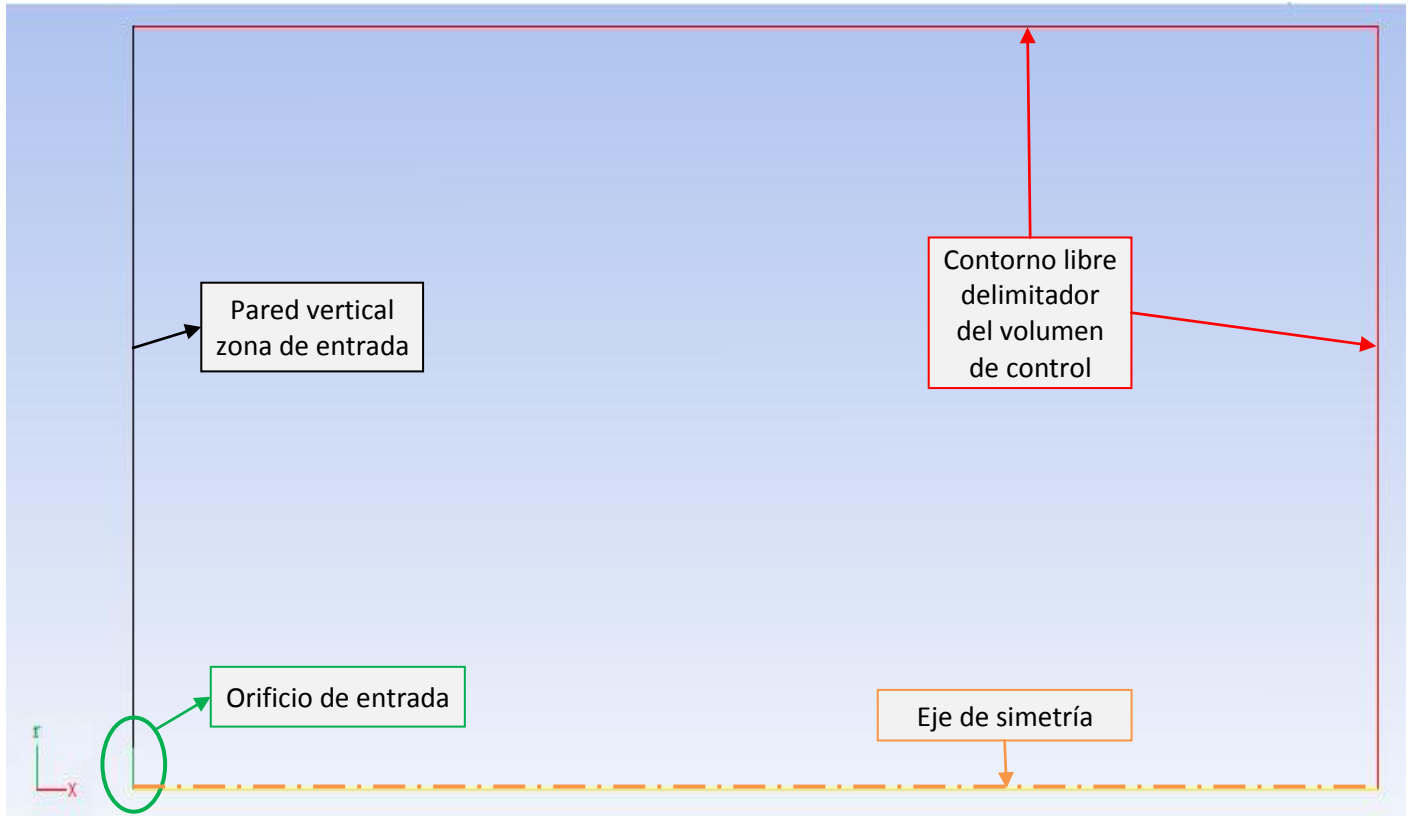


Figura 3.1.1. Zonas del volumen de control. Simetría axial.

En el orificio de entrada definido por $r_{ent} \in 0 \leq r \leq \frac{D}{2}$ las condiciones de contorno son las siguientes:

$$u_x(0, r_{ent}, t) = U_j \quad (3.1.14)$$

$$u_r(0, r_{ent}, t) = 0 \quad (3.1.15)$$

$$Z_i(0, r_{ent}, t) = 1 \quad (3.1.16)$$

De esta forma en el orificio de entrada se impone la condición de perfil de velocidad axial en la entrada, expuesta en el *Capítulo 2*. También se fija el valor de la concentración de las

especies químicas, o escalares pasivos, igual a la unidad debido a que es en el orificio de entrada donde se produce la inyección de los mismos.

En la pared vertical de la zona de entrada definida por $r_{pared} \in \frac{D}{2} \leq r \leq R_{m\acute{a}x}$ las condiciones de contorno son las siguientes:

$$u_x(0, r_{pared}, t) = 0 \quad (3.1.17)$$

$$u_r(0, r_{pared}, t) = 0 \quad (3.1.18)$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x}(0, r_{pared}, t) = 0 \quad (3.1.19)$$

Como se deduce de las condiciones (3.1.17) y (3.1.18), en la pared de la zona de entrada se impone la condición de adherencia, que implica que el fluido en contacto con la pared tiene la misma velocidad que la pared, por lo que al ser una pared fija, la velocidad es nula.

Mediante la condición (3.1.19) se establece que la pared es impermeable al paso de especies o escalares.

En el eje de simetría definido por $x_{eje} \in 0 \leq x \leq X_{m\acute{a}x}$ las condiciones de contorno son las siguientes:

$$\frac{\partial u_x}{\partial r}(x_{eje}, 0, t) = 0 \quad (3.1.20)$$

$$u_r(x_{eje}, 0, t) = 0 \quad (3.1.21)$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial r}(x_{eje}, 0, t) = 0 \quad (3.1.22)$$

Las condiciones de contorno en el eje de simetría implican que tanto la velocidad, como la concentración de las especies, no deben variar en la dirección radial. Al mismo tiempo la componente radial de la velocidad debe ser nula, por lo que la velocidad axial en el eje es máxima.

Debido a la necesidad de integrar las ecuaciones que definen el movimiento en un volumen finito, es necesario establecer un contorno libre que defina un volumen de control cerrado. Por tanto, se definen dos contornos libres, uno vertical $r_{contorno} \in 0 \leq r \leq R_{m\acute{a}x}$, y otro horizontal $x_{contorno} \in 0 \leq x \leq X_{m\acute{a}x}$:

$$\text{Contorno libre vertical:} \quad P(X_{m\acute{a}x}, r_{contorno}, t) = P_{amb} \quad (3.1.23)$$

$$\text{Contorno libre horizontal:} \quad P(x_{contorno}, R_{m\acute{a}x}, t) = P_{amb} \quad (3.1.24)$$

Las condiciones impuestas en los contornos libres fijan el valor de la presión en el campo lejano igual a la presión ambiente, que como hemos definido es igual a la presión atmosférica.

3.1.3 Adimensionalización.

El concepto de adimensionalización adquiere relevancia desde el punto de vista en que se reduce el número de variables independientes que intervienen en la solución de los casos de estudio y permite establecer la semejanza en el estudio de modelos. La adimensionalización reduce al mínimo los grados de libertad de los casos de estudio, obteniéndose de esta forma unas leyes de escala más económicas e inmediatas. Por último, otra de las ventajas obtenidas al adimensionalizar los casos de estudio y que está relacionada con el teorema de π de Buckingham (1914), es que los resultados obtenidos son independientes del sistema de unidades elegido para representarlos.

Para adimensionalizar, deberemos reemplazar las variables independientes y dependientes que caracterizan los casos de estudio, por variables adimensionales. Para ello se divide la variable a adimensionalizar por un grupo de parámetros que generen las mismas dimensiones.

A continuación mostramos las variables adimensionales utilizadas, teniendo en cuenta que en un sistema fluidodinámico isotérmico pueden expresarse todas las variables implicadas utilizando tres dimensiones: masa (densidad del chorro, ρ_j), longitud (diámetro orificio de entrada, D) y tiempo (velocidad de inyección del chorro, U_j).

$$- \text{Variables de longitud:} \quad x^* = \frac{x}{D} \quad r^* = \frac{r}{D} \quad (3.1.25)$$

$$- \text{Variable de velocidad:} \quad \bar{u}^* = \frac{\bar{u}}{U_j} \quad (3.1.26)$$

$$- \text{Variable de tiempo:} \quad t^* = \frac{t}{D/U_j} \quad (3.1.27)$$

$$- \text{Variable de presión:} \quad P^* = \frac{P - P_{amb}}{\rho_j U_j^2} \quad (3.1.28)$$

$$- \text{Variables de fluido:} \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_j} \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_j} \quad \nu^* = \frac{\nu}{\nu_j} \quad D_i^* = \frac{D_i}{D_{ij}} \quad (3.1.29)$$

Una vez adimensionalizadas las variables que caracterizan los casos de estudio, procedemos a adimensionalizar tanto las ecuaciones que definen el movimiento, como las condiciones iniciales y de contorno. En los apartados 3.1.4 y 3.1.5, se plantea el problema adimensional para los casos homogéneo y de mezcla, respectivamente. No obstante, como podremos observar en dichos apartados, a la hora de adimensionalizar las ecuaciones que definen el movimiento (3.1.1), (3.1.6) y (3.1.9), aparecen números adimensionales característicos asociados:

- **Número de Reynolds, Re :**

El número de Reynolds aparece al adimensionalizar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (3.1.6). Compara los términos convectivos con los difusivos, o lo que es lo mismo, vincula parámetros característicos de las fuerzas de inercia con aquellos de las fuerzas viscosas. Queda definido de la siguiente manera:

$$Re = \frac{\rho_j U_j D}{\mu_j} = \frac{U_j D}{\nu_j} \quad (3.1.30)$$

El valor del número de Reynolds caracteriza el tipo de flujo que se está analizando. En todos los casos de estudio, el valor del número de Reynolds es $Re = 2000$, por lo que estamos ante un flujo laminar.

- **Número de Froude densimétrico, Fr :**

El número de Froude aparece al adimensionalizar la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (3.1.6) debido a la inclusión de la gravedad dentro de los casos de estudio. Relaciona parámetros característicos de las fuerzas de inercia con aquellos de las fuerzas gravitatorias. El número de Froude densimétrico se define de la siguiente forma:

$$Fr = \frac{U_j^2}{\hat{g}D} = \frac{U_j^2}{\left(\frac{\rho_j - \rho_{amb}}{\rho_j}\right)gD} \quad (3.1.31)$$

Como se deduce de la ecuación (3.1.30), en el caso en que el chorro inyectado y el ambiente tengan la misma densidad, como ocurre en el caso homogéneo, el número de Froude es infinito, indicando que las fuerzas gravitatorias son despreciables frente a las fuerzas de inercia.

- **Número de Schmidt, Sc :**

El número de Schmidt aparece al adimensionalizar la ecuación de conservación de las especies químicas o escalares (3.1.9). Relaciona la difusividad de la cantidad de movimiento, con la difusividad de la especie química o escalar que se considere. El número de Schmidt se define de la siguiente manera:

$$Sc = \frac{\nu}{D_i} \quad (3.1.32)$$

, siendo ν la viscosidad cinemática y D_i la difusividad de la especie i .

3.1.4 Descarga de agua en agua. Caso homogéneo.

Después de haber analizado las ecuaciones generales que definen el movimiento del flujo, en este apartado se van a definir las ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno particularizadas para el caso homogéneo con simetría axial y en coordenadas cilíndricas. Al mismo tiempo se incluirá la ecuación adimensionalizada.

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_x)}{\partial x} = 0 \quad (3.1.33)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \cdot u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(u_x^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (3.1.34)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento:

$$C. axial: \quad \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] \quad (3.1.35)$$

$$C. radial: \quad \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right] \quad (3.1.36)$$

$$C. axial^*: \quad \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} + u_x^* \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}} \right] \quad (3.1.37)$$

$$C. radial^*: \quad \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} + u_x^* \frac{\partial u_r^*}{\partial x^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial x^{*2}} \right] \quad (3.1.38)$$

- Ecuación de conservación de los escalares pasivos:

$$\rho \left[\frac{\partial Z_i}{\partial t} + u_r \frac{\partial Z_i}{\partial r} + u_x \frac{\partial Z_i}{\partial x} \right] = \rho D_i \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \right] \quad (3.1.39)$$

$$\left(\frac{\partial Z_i}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial Z_i}{\partial r^*} + u_x^* \frac{\partial Z_i}{\partial x^*} \right) = \frac{1}{Sc \cdot Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Z_i}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^{*2}} \right] \quad (3.1.40)$$

- Condiciones iniciales y de contorno:

$$\blacktriangleright \text{ **Condiciones iniciales:}** \quad t^* = 0 \quad y \quad \left(0 \leq x^* \leq \frac{X_{\max}}{D} \right) \quad \left(0 \leq r^* \leq \frac{R_{\max}}{D} \right) \quad (3.1.41)$$

$$u_x^*(x^*, r^*, 0) = 0 \quad u_r^*(x^*, r^*, 0) = 0 \quad Z_i(x^*, r^*, 0) = 0 \quad (3.1.42)$$

$$\rho^*(x^*, r^*, 0) = 1 \quad P^*(x^*, r^*, 0) = 0 \quad (3.1.43)$$

➤ **Orificio de entrada:** $x^* = 0$ y $\left(r_{ent}^* \in 0 \leq r^* \leq \frac{1}{2}\right)$ (3.1.44)

$$u_x^*(0, r_{ent}^*, t^*) = 1 \quad u_r^*(0, r_{ent}^*, t^*) = 0 \quad Z_i(0, r_{ent}^*, t^*) = 1 \quad (3.1.45)$$

➤ **Pared vertical zona de entrada:** $x^* = 0$ y $\left(r_{pared}^* \in \frac{1}{2} \leq r^* \leq \frac{R_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ (3.1.46)

$$u_x^*(0, r_{pared}^*, t^*) = 0 \quad u_r^*(0, r_{pared}^*, t^*) = 0 \quad \frac{\partial Z_i}{\partial x^*}(0, r_{pared}^*, t^*) = 0 \quad (3.1.47)$$

➤ **Eje de simetría:** $\left(x_{eje}^* \in 0 \leq x^* \leq \frac{X_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ y $r^* = 0$ (3.1.48)

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial r^*}(x_{eje}^*, 0, t^*) = 0 \quad u_r^*(x_{eje}^*, 0, t^*) = 0 \quad \frac{\partial Z_i}{\partial r^*}(x_{eje}^*, 0, t^*) = 0 \quad (3.1.49)$$

➤ **Contorno libre vertical:** $\left(x_{cont_V}^* = \frac{X_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ y $\left(r_{cont_V}^* \in 0 \leq r^* \leq \frac{R_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ (3.1.50)

$$P^*(x_{cont_V}^*, r_{cont_V}^*, t^*) = 0 \quad (3.1.51)$$

➤ **Contorno libre horizontal:** $\left(x_{cont_H}^* \in 0 \leq x^* \leq \frac{X_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ y $\left(r_{cont_H}^* = \frac{R_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ (3.1.52)

$$P^*(x_{cont_H}^*, r_{cont_H}^*, t^*) = 0 \quad (3.1.53)$$

3.1.5 Descarga de agua en ambiente de mezcla. Casos de mezcla.

A continuación particularizamos las ecuaciones que definen el movimiento del flujo para los casos de mezcla, aplicando la simetría axial y escribiéndolas en coordenadas cilíndricas. Al mismo tiempo se incluye la ecuación adimensionalizada, utilizando los parámetros definidos en el apartado 3.1.3.

- Ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_x)}{\partial x} = 0 \quad (3.1.54)$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \cdot u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(u_x^*)}{\partial x^*} = 0 \quad (3.1.55)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento:

$$C. axial: \quad \rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + (\rho - \rho_{amb}) g_x \quad (3.1.56)$$

$$C. radial: \quad \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right] + (\rho - \rho_{amb}) g_r \quad (3.1.57)$$

$$C. axial^*: \quad \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} + u_x^* \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u_x^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}} \right] + \frac{1}{Fr} \quad (3.1.58)$$

$$C. radial^*: \quad \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} + u_x^* \frac{\partial u_r^*}{\partial x^*} \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial x^{*2}} \right] + \frac{1}{Fr} \quad (3.1.59)$$

- Ecuación de conservación de los escalares pasivos:

$$\rho \left[\frac{\partial Z_w}{\partial t} + u_r \frac{\partial Z_w}{\partial r} + u_x \frac{\partial Z_w}{\partial x} \right] = \rho D_w \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z_w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 Z_w}{\partial x^2} \right] \quad (3.1.60)$$

$$\left(\frac{\partial Z_w}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial Z_w}{\partial r^*} + u_x^* \frac{\partial Z_w}{\partial x^*} \right) = \frac{1}{Sc \cdot Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial Z_w}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 Z_w}{\partial x^{*2}} \right] \quad (3.1.61)$$

- Condiciones iniciales y de contorno:

$$\text{➤ } \textbf{Condiciones iniciales:} \quad t^* = 0 \quad y \quad \left(0 \leq x^* \leq \frac{X_{m\acute{a}x}}{D} \right) \quad \left(0 \leq r^* \leq \frac{R_{m\acute{a}x}}{D} \right) \quad (3.1.62)$$

$$u_x^*(x^*, r^*, 0) = 0 \quad u_r^*(x^*, r^*, 0) = 0 \quad Z_w(x^*, r^*, 0) = 0 \quad (3.1.63)$$

$$\rho^*(x^*, r^*, 0) = 1 \quad P^*(x^*, r^*, 0) = 0 \quad (3.1.64)$$

➤ **Orificio de entrada:** $x^* = 0$ y $\left(r_{ent}^* \in 0 \leq r^* \leq \frac{1}{2}\right)$ (3.1.65)

$$u_x^*(0, r_{ent}^*, t^*) = 1 \quad u_r^*(0, r_{ent}^*, t^*) = 0 \quad Z_w(0, r_{ent}^*, t^*) = 1 \quad (3.1.66)$$

➤ **Pared vertical zona de entrada:** $x^* = 0$ y $\left(r_{pared}^* \in \frac{1}{2} \leq r^* \leq \frac{R_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ (3.1.67)

$$u_x^*(0, r_{pared}^*, t^*) = 0 \quad u_r^*(0, r_{pared}^*, t^*) = 0 \quad \frac{\partial Z_w}{\partial x^*}(0, r_{pared}^*, t^*) = 0 \quad (3.1.68)$$

➤ **Eje de simetría:** $\left(x_{eje}^* \in 0 \leq x^* \leq \frac{X_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ y $r^* = 0$ (3.1.69)

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial r^*}(x_{eje}^*, 0, t^*) = 0 \quad u_r^*(x_{eje}^*, 0, t^*) = 0 \quad \frac{\partial Z_w}{\partial r^*}(x_{eje}^*, 0, t^*) = 0 \quad (3.1.70)$$

➤ **Contorno libre vertical:** $\left(x_{cont_V}^* = \frac{X_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ y $\left(r_{cont_V}^* \in 0 \leq r^* \leq \frac{R_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ (3.1.71)

$$P^*(x_{cont_V}^*, r_{cont_V}^*, t^*) = 0 \quad (3.1.72)$$

➤ **Contorno libre horizontal:** $\left(x_{cont_H}^* \in 0 \leq x^* \leq \frac{X_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ y $\left(r_{cont_H}^* = \frac{R_{m\acute{a}x}}{D}\right)$ (3.1.73)

$$P^*(x_{cont_H}^*, r_{cont_H}^*, t^*) = 0 \quad (3.1.74)$$

3.2 Parámetros de análisis.

Después de haber definido las condiciones en que deben realizarse los distintos casos de estudio, y de haber analizado las ecuaciones que rigen el movimiento del fluido en el interior del volumen de control, procederemos a definir los parámetros elegidos para caracterizar tanto la evolución del chorro de agua, como los distintos procesos que tienen lugar en el volumen de control.

Durante todo el *apartado 3.2*, se seguirá una misma estructura, proporcionando en primer lugar una visión teórica del significado e implicaciones del parámetro considerado en cada momento, y posteriormente se procederá a explicar la forma de implementar el cálculo de dicho parámetro desde un punto de vista teórico, mientras que el código específico se incluye en el *Anexo C*.

Como ya se ha comentado anteriormente, se ha seguido un mismo orden en la evaluación de los parámetros de análisis tanto en este apartado como en el *Capítulo 4* referente a los resultados obtenidos, por lo que se recomienda una lectura alternada del desarrollo teórico, seguido del apartado correspondiente dentro del *Capítulo 4* referente al análisis de los resultados.

3.2.1 Evolución del chorro de agua.

El presente proyecto abarca el estudio de tres casos distintos de descarga de un chorro de agua sobre un volumen de control diferente en cada caso. En un primer análisis de los resultados obtenidos se pretende proporcionar una visión global de lo que está sucediendo en cada uno de los casos de estudio. Por tanto, antes de entrar en detalle con los distintos parámetros involucrados en el proceso se analiza la evolución del chorro de agua en el interior del ambiente.

Si tenemos en cuenta el caso homogéneo en el que el chorro de agua se introduce en un volumen de control formado únicamente por agua, se hace indispensable el uso de escalares pasivos que nos delimiten qué parte del volumen de control es chorro y qué parte es el fluido que estaba previamente en el volumen de control.

Tal y como se ha definido a la hora de realizar el proyecto, se utilizan cuatro escalares pasivos con diferentes valores de difusividad cada uno. A la hora de representar la evolución del chorro de agua haremos uso del escalar-0 que es el menos difusivo, y por tanto el que mejor se ajusta a la evolución del chorro.

En los casos de mezcla, a diferencia del caso homogéneo, se definen dos especies químicas distintas: el chorro de agua y el fluido contenido en el volumen de control. En estos casos no se incluye ningún escalar pasivo, de forma que la evolución del chorro de agua se representa mediante el análisis de la evolución de la fracción másica de agua en el ambiente.

De esta forma quedan definidos los parámetros que se utilizarán para caracterizar la evolución del chorro. A continuación se explica cómo implementar en Fluent el uso de escalares pasivos y la definición de las distintas especies en un caso de mezcla.

- **Implementación en Fluent.**

En primer lugar, haremos referencia al caso homogéneo y a la forma de definir los escalares pasivos en Fluent. Como se vio en el *apartado 3.1.3*, al adimensionalizar la ecuación de conservación de las especies químicas aparece el número de Schmidt, Sc , que compara la difusividad de la cantidad de movimiento, $\nu \left(\frac{m^2}{s}\right)$, con la de la especie química que se analiza, $D_i \left(\frac{m^2}{s}\right)$.

$$Sc = \frac{\nu}{D_i}$$

Se han definido cuatro escalares pasivos a través de sus números de Schmidt, sin embargo a la hora de definirlos en Fluent se debe introducir el valor de la difusividad de cada escalar con unidades $\left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right)$. El valor de la difusividad que debemos introducir en Fluent lo llamaremos Γ , y lo calcularemos mediante la siguiente transformación:

$$\Gamma = \rho \cdot D_i = \rho \cdot \frac{\nu}{Sc} = \rho \cdot \frac{\mu}{\rho \cdot Sc} = \frac{\mu}{Sc} \left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right) \quad (3.2.1)$$

Por tanto, conocido el valor de la viscosidad dinámica del agua y el número de Schmidt de cada escalar pasivo podremos obtener el valor de la difusividad, Γ , que debemos introducir en Fluent:

$$\text{Escalar} - 0 \quad (Sc = \infty) \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\mu}{Sc} = \frac{0.001003}{\infty} = 0 \left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right) \quad (3.2.2)$$

$$\text{Escalar} - 1 \quad (Sc = 10) \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\mu}{Sc} = \frac{0.001003}{10} = 0.0001003 \left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right) \quad (3.2.3)$$

$$\text{Escalar} - 2 \quad (Sc = 1) \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\mu}{Sc} = \frac{0.001003}{1} = 0.001003 \left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right) \quad (3.2.4)$$

$$\text{Escalar} - 3 \quad (Sc = 0.1) \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\mu}{Sc} = \frac{0.001003}{0.1} = 0.01003 \left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right) \quad (3.2.5)$$

En el *Anexo A* se puede encontrar una explicación detallada referente al programa Fluent y cómo acceder al menú donde introducir estos valores.

A continuación se analiza la forma de definir las distintas especies químicas en Fluent. Para ello debemos acceder al cuadro de diálogo de Fluent en donde se definen las propiedades

genéricas del modelo utilizado, y posteriormente seleccionar un modelo de especies. El tipo de modelo de especies que se ajusta al problema planteado en este proyecto es el modelo de transporte de especies en ausencia de reacciones químicas. El número de especies involucradas es igual a dos: el chorro de agua y el fluido contenido en el volumen de control.

Además se deben definir las propiedades de la mezcla, que en nuestro caso serán las propiedades de la interfase de las dos especies. Dichas propiedades han sido definidas en el *Capítulo 2*, donde se fija la variación de la densidad y la viscosidad en función de la fracción másica de agua.

En el *Anexo A* se encuentra una explicación detallada de cómo introducir en Fluent los parámetros definidos para las especies involucradas en el caso de mezcla.

3.2.2 Posición y velocidad del frente del chorro.

El estudio de la posición del frente del chorro o también llamado penetración del chorro, es de especial importancia al indicarnos el área de influencia del chorro y estar relacionado con el mezclado. No obstante la penetración del chorro de agua se ve influenciada por varios parámetros tales como el tipo de orificio por el que se inyecta el chorro, el caudal del chorro, y la densidad y viscosidad de los fluidos implicados. La diferencia entre los tres casos de estudio ha sido el fluido que se encuentra en el interior del volumen de control, manteniéndose constante en todos ellos el diámetro del orificio de entrada del chorro y el caudal de entrada.

La evolución en el tiempo de la velocidad del frente del chorro, aporta una visión clara de los fenómenos de frenado y aceleración que sufre la parte frontal del chorro de agua en su avance en el volumen de control. Además, como se verá más adelante en el *apartado 4.6*, la velocidad en el frente del chorro guarda relación con la evolución de la energía cinética en los instantes iniciales. Es por todo esto que se ha decidido incluir la velocidad del frente del chorro entre los parámetros de estudio del problema, a pesar de ser un dato que puede obtenerse a partir de la pendiente de la recta de penetración del chorro de agua frente al tiempo.

Debe indicarse que la velocidad en el chorro también se ve influenciada por la presencia de torbellinos, que crean una sobre presión en el eje que se traduce en un empuje y aumento de la velocidad en el mismo.

Como se ha indicado anteriormente, la evolución en el tiempo de las curvas de penetración y velocidad del frente del chorro son función, entre otros parámetros, de la densidad y viscosidad de los fluidos implicados. En los tres casos de estudio de este proyecto, las diferencias entre el chorro y los volúmenes de control en cuanto a la densidad y viscosidad de los mismos no son muy elevadas, y por tanto, aunque se observan diferencias entre ellos, el comportamiento, o la tendencia, creciente o decreciente de la penetración y velocidad del frente del chorro se mantendrá igual en los tres casos, aunque desplazada en el tiempo. Se producirán antes los cambios de tendencia en los casos de menor número de Froude al implicar en ellos un chorro más pesado, o lo que es lo mismo, un mayor efecto de la gravedad, y por tanto, una mayor aceleración.

- **Implementación en Fluent.**

A continuación se describirá conceptualmente la forma en que se ha implementado en el programa Fluent el cálculo de la posición y la velocidad del frente del chorro. Al igual que en el resto de variables de análisis, se ha creado una función o UDF, llamada “on_demand_vel_frente”, que nos devuelve el valor de la posición y la velocidad en el frente del chorro.

Utilizando los mismos argumentos que en el *apartado* anterior 3.2.1, la posición y velocidad en el frente del chorro se obtendrán a partir del escalar-0, para el caso homogéneo, y en función de la fracción másica de agua para el caso de mezcla.

La posición del frente del chorro de agua se ha definido como la celda sobre el eje de simetría que cumple que la fracción de escalar-0, en el caso homogéneo, o la fracción másica de agua para el caso de mezcla, es igual al 5%. Además, se debe cumplir que dicho punto se encuentre por delante de la coordenada axial del centro del vórtice principal.

Iterando sobre el eje de simetría encontraremos la posición del frente del chorro, para posteriormente calcular la velocidad en dicho punto. Para más información, el código utilizado para obtener los resultados se encuentra en el *Anexo E*.

Por último, se incluirá la llamada a nuestra función en el archivo Journal que se encargará de abrir cada iteración temporal en el programa Fluent, de tal manera que obtengamos el valor de la posición y la velocidad en el frente del chorro para cada instante de tiempo.

3.2.3 Posición del vórtice de cabeza.

Al igual que en el apartado anterior, el estudio de la posición del centro del vórtice puede considerarse como el estudio de la penetración del mismo en el volumen de control.

La formación del vórtice de cabeza ocurre en los instantes iniciales al inyectar el chorro de agua en el interior del volumen de control. En ese momento, el chorro de agua se encuentra con la presencia del fluido en reposo contenido en el volumen de control, lo cual provoca que el chorro vea impedido su avance y comience el enrollamiento sobre sí mismo formando el vórtice de cabeza.

El estudio de la posición del vórtice de cabeza también es importante desde el punto de vista del mezclado, debido a que indica la zona del volumen de control en donde se produce el mayor mezclado.

A continuación se describe la forma de cálculo de la posición del vórtice de cabeza en el programa Fluent.

- **Implementación en Fluent.**

En primer lugar deberemos definir las características del vórtice de cabeza que nos permitirán determinar su posición. Para ello haremos uso del Principio de Bernoulli, que puede aplicarse para relacionar la presión y la velocidad tangencial en un vórtice. No obstante, como se indica en [9], existen una gran variedad de métodos para la localización de vórtices. En nuestros casos de estudio, al tratarse de un flujo no estacionario, es necesario que el método de detección del vórtice cumpla con la invariancia galileana. Esto es, que el método no dependa directamente de la velocidad, por lo que si el método está basado en la presión o la vorticidad, cumple con dicha invariancia.

En un vórtice se registran líneas de corriente circulares, siendo la velocidad tangencial en cada línea de corriente inversamente proporcional a la distancia al centro del vórtice. Por tanto, suponiendo la fuerza del vórtice constante en cada instante de tiempo, el vórtice tendrá una mayor velocidad tangencial cerca de su centro. Siguiendo el mismo razonamiento, pero aplicando la ecuación de Bernoulli al vórtice, se puede afirmar que cuando la velocidad tangencial es máxima, la presión es mínima, lo cual ocurre en el centro del vórtice.

Como se explica en el libro de *Alex Hoffman* [10] cuando trata los principios básicos que rigen la dinámica en los vórtices, es conveniente analizar la relación entre la presión estática, p , y la presión dinámica, $\frac{1}{2}\rho v^2$, siendo ρ la densidad. La ecuación de Bernoulli para fluidos en los que no hay fricción es la siguiente:

$$\frac{p}{\rho} + gh + \frac{1}{2}u^2 = K \quad (3.2.6)$$

, siendo K una constante a lo largo de la línea de corriente.

La ecuación de Bernoulli (3.2.6) muestra cómo la presión estática y la presión dinámica pueden ser intercambiadas en el campo fluido. En las zonas donde la velocidad es elevada, la presión estática será baja y viceversa. De esta forma se observa la interdependencia entre las presiones estática y dinámica.

Sin embargo, en los casos que estamos estudiando en el presente proyecto, la fricción producida por la viscosidad juega un papel importante. La viscosidad provoca la disipación de la energía mecánica, lo cual implica que la ecuación de Bernoulli deje de ser constante y decrezca a lo largo de una línea de corriente.

En el vórtice de cabeza, el chorro de agua se mueve desde fuera hacia el interior del vórtice, acelerándose de acuerdo con el principio de conservación del momento angular. Al mismo tiempo su presión estática disminuye, por lo que podemos decir que el vórtice transforma la presión estática en presión dinámica.

Por tanto, de acuerdo con lo visto anteriormente, el centro de un vórtice es un punto de mínima presión estática, no obstante, en los casos estudiados aparecen varios vórtices en el volumen de control. Como el estudio analiza el vórtice principal de cabeza, éste en general se corresponderá con el de mayor velocidad tangencial y por tanto, el de menor presión estática en el volumen de control. Así es como sucede en los casos estudiados, pero de cara a otros proyectos puede ser necesaria la inclusión de una condición adicional que fije ese punto de mínima presión estática en un entorno de la cabeza del chorro para no obtener datos erróneos en la posición del vórtice principal de cabeza.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, para calcular el centro del vórtice debemos encontrar en el volumen de control la celda de mínima presión estática. No obstante, como se indica en el proyecto de *José Ramón Fernández* [11], es necesaria una posterior corrección parabólica de dicho punto entre las celdas que la rodean.

Al igual que en el resto de variables de análisis, se ha definido una función, o UDF, que iterará entre todas las celdas del volumen de control buscando la de menor presión estática. Para ello se utiliza la macro $C_P(c,t)$ definida en Fluent, que nos devuelve el valor de la presión estática relativa a la presión de operación o presión atmosférica, definido así por nosotros en el *Capítulo 2* del presente proyecto. La función que hemos diseñado para calcular el punto de mínima presión está incluida dentro de otra, llamada “on_demand_centro”. La corrección de la posición del centro del vórtice utiliza una sub-función llamada “get_neighbour_cell”. Ambos códigos están escritos en lenguaje de programación C, interpretable por Fluent, y se encuentran en el *Anexo E*.

Finalmente, se incluirá una llamada a dichos códigos en el archivo Journal que irá iterando entre todos los instantes de tiempo considerados en el proyecto, de forma que obtengamos la evolución temporal de la posición del centro del vórtice principal de cabeza.

3.2.4 Vorticidad en el torbellino de cabeza.

El apartado anterior se ha centrado en describir la forma de localizar el torbellino de cabeza y lo que acontece en cuanto a su posición en el volumen de control. En este apartado se va a realizar un análisis más detallado de las características del torbellino de cabeza, haciendo especial hincapié en la vorticidad del mismo.

La forma más habitual de describir el movimiento de un fluido es utilizando su campo de velocidades, $u(\vec{x}, t)$, o lo que es lo mismo, un campo vectorial que para cada punto del espacio y tiempo nos devuelve la velocidad del fluido en dicho punto. Sin embargo, además de la velocidad, la vorticidad del fluido lleva asociada información importante acerca de la naturaleza del fluido, midiendo el giro del mismo. La vorticidad puede definirse como el rotacional de la velocidad del fluido:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (3.2.7)$$

Debido a las condiciones de simetría que afectan a los casos de estudio, descritas en el *Capítulo 2*, no se registran variaciones en el plano z , por lo que la vorticidad queda definida de la siguiente forma:

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \vec{e}_z = \omega \vec{e}_z \quad (3.2.8)$$

, produciéndose vorticidad únicamente cuando se registran variaciones transversales de la velocidad en cada una de sus componentes, en concreto, mayores variaciones en la dirección axial de la proyección radial de la velocidad, y menores variaciones en la dirección radial de la proyección axial de la velocidad, para cada punto fluido.

Para determinar la evolución de la vorticidad con respecto al tiempo, deberemos tomar el rotacional a ambos lados de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento de Navier-Stokes, ecuación (3.1.6), de forma que el resultado se muestra a continuación en la ecuación (3.2.10), utilizando previamente la identidad (3.2.9) y teniendo en cuenta que el rotacional de una fuerza conservativa, como es la gravedad, es nulo:

$$(u \cdot \nabla)u = \frac{\nabla(u^2)}{2} - u \times \omega \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (u \times \omega) - \frac{\nabla P \times \nabla \rho}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \omega \quad (3.2.10)$$

A continuación reescribimos la ecuación de la evolución de vorticidad (3.2.10), utilizando las relaciones (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.13):

$$\nabla \times (u \times \omega) = (\omega \cdot \nabla)u + u(\nabla \cdot \omega) - \omega(\nabla \cdot u) - (u \cdot \nabla)\omega \quad (3.2.11)$$

$$\nabla \cdot \omega = 0 \quad (3.2.12)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\omega \quad (3.2.13)$$

Resultando finalmente en la ecuación, (3.2.14):

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\omega(\nabla \cdot u) + (\omega \cdot \nabla)u - \frac{\nabla P \times \nabla \rho}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \omega \quad (3.2.14)$$

La ecuación (3.2.14) describe la evolución temporal de la vorticidad para un flujo general tridimensional. A continuación analizamos cada término de acuerdo con [12].

El segundo término de la ecuación (3.2.14) representa la expansión del campo de vorticidad. Es un término que no genera ni destruye vorticidad sino que redistribuye la vorticidad existente. Este término es importante cuando existe combustión o en flujos compresibles, por tanto en nuestros casos de estudio no tiene ninguna relevancia.

El tercer término de la ecuación (3.2.14), es el “*vortex stretching*”, esto es, el aumento de la vorticidad debido al estiramiento, y es el mecanismo mediante el cual la energía turbulenta se transfiere a las escalas más pequeñas. Sin embargo, para flujos bidimensionales, como son nuestros casos de estudio (analizado en el *Capítulo 2* y en el *apartado 3.1*), este término es idénticamente cero, quedando patente que el desarrollo de este tipo de flujos es cuantitativamente diferente con respecto a los flujos tridimensionales.

El cuarto término, se conoce como “*baroclinic torque*”, y es el responsable de la generación de vorticidad (vorticidad baroclínica) debido a la desigual aceleración como resultado de gradientes de densidad y presión desalineados. El fluido de menor densidad es acelerado más rápidamente que el fluido de mayor densidad, resultando en una capa de mezcla y en la generación de vorticidad. Obviamente, este término es nulo cuando no hay diferencia de densidades como ocurre en el caso homogéneo, mientras que en los casos de mezcla, como ya se ha explicado anteriormente, este término es relevante afectando a la dinámica del chorro.

El quinto y último término de la ecuación (3.2.14), representa la difusión de la vorticidad debido a la viscosidad. Es el término que principalmente afecta a la evolución temporal de la vorticidad en todos los casos de estudio llevados a cabo en el presente proyecto. Cabe notar, que en el caso de un elevado número de Reynolds, el efecto de la viscosidad se vería atenuado respecto al resto de términos.

Finalmente, la ecuación general que rige la evolución temporal de la vorticidad en nuestros casos de estudio es:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \omega \quad (3.2.15)$$

, siendo nulo el segundo término de la ecuación (3.2.15) para el caso homogéneo de chorro de agua en agua, donde no se produce vorticidad baroclínica al no existir gradientes de densidades.

Manipulando la ecuación (3.2.15), podemos mostrar el efecto de la gravedad separando la presión en presión hidrostática y presión dinámica, $P = P_H + P_D$. Tal y como indican *Patnaik and Kailasanath* [13], la vorticidad baroclínica puede ser separada en dos partes: una debida a la presión dinámica, debida a los efectos de la fuerza centrífuga en los vórtices, y otra debida a la presión hidrostática, dada por $P_H = \int_0^z \rho g dz$, la cual determinará el efecto de la gravedad.

Utilizando esta descomposición y simplificando, se observa el efecto de la gravedad en el término de vorticidad baroclínica:

$$\frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} [\nabla \rho \times \nabla P_D] - \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (3.2.16)$$

Después de haber mostrado cómo evoluciona temporalmente la vorticidad, a continuación vamos a analizar la distribución espacial de la vorticidad en el centro del vórtice. Como indica *Sheldon I. Green* [14], a medida que el vórtice se propaga en el interior del volumen de control, éste aumenta su volumen con el tiempo debido a la incorporación del propio fluido del volumen de control. Además, la difusión viscosa también provoca el crecimiento del vórtice principal.

El comportamiento de la vorticidad en el vórtice viscoso más simple, como es el vórtice de Lamb-Oseen, puede compararse con el caso de estudio homogéneo del chorro de agua que se introduce en el volumen de control formado por agua. Según *Saffman* [15], la vorticidad en el centro del vórtice para un flujo bidimensional, con simetría axial y líneas de corriente circulares alrededor del vórtice, tiene una distribución Gaussiana dada por:

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_c^2} e^{-\frac{r^2}{r_c^2}} \quad (3.2.17)$$

$$\Gamma(r, t) = \Gamma_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2}{r_c^2}} \right) \quad (3.2.18)$$

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{r_c^2}} \right) \quad (3.2.19)$$

, donde Γ_0 es la circulación total inicial, r es la distancia radial desde el centro del vórtice, $r_c = \sqrt{4\nu t}$ es el radio característico del vórtice (ν es la viscosidad cinemática) y $v(r, t)$ representa la velocidad tangencial alrededor del vórtice.

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (3.2.17), la vorticidad en el vórtice principal alcanza un valor máximo, disminuyendo exponencialmente al aumentar la distancia radial al centro.

También se observa en las ecuaciones, la existencia de una singularidad para un tiempo $t = 0$. Para tiempos $t > 0$, se observa un máximo de la vorticidad en $r = 0$:

$$\omega_{\max}(0, t) = \frac{\Gamma_0}{\pi r_c^2} = \frac{\Gamma_0}{4\pi vt} \quad (3.2.20)$$

Como se observa en la ecuación (3.2.20), la vorticidad máxima localizada en el centro del vórtice de Lamb-Oseen, disminuye con el tiempo de forma $\sim t^{-1}$.

La ecuación (3.2.19) representa la velocidad tangencial alrededor del vórtice de Lamb-Oseen, localizándose la máxima velocidad tangencial a una distancia, $r = r_{v\max} = 1.12 \cdot r_c$ del vórtice:

$$v_{\max}(r_{v\max}, t) = \eta \frac{\Gamma_0}{2\pi r_c} = \eta \frac{\Gamma_0}{4\pi\sqrt{vt}} \quad (3.2.21)$$

, siendo $\eta = 0.638$.

Como se observa en la ecuación (3.2.21), la velocidad tangencial máxima disminuye con el tiempo de forma $\sim t^{-1/2}$.

Las ecuaciones (3.2.20) y (3.2.21) muestran la diferencia existente entre el punto de máxima vorticidad localizado en $r = 0$, y el punto de máxima velocidad tangencial localizado en $r = 1.12 \cdot r_c$. Como se explicó en el apartado 3.2.3, en nuestros casos de estudio hemos considerado el centro del vórtice como el punto de mínima presión estática, que se corresponde con el punto de máxima velocidad tangencial. Por tanto, existe una diferencia entre el centro del vórtice y el punto de máxima vorticidad definida por:

$$d = 1.12 \cdot r_c = 2.24\sqrt{vt} \quad (3.2.22)$$

Como puede observarse en la ecuación (3.2.22), la diferencia en la posición entre el centro del vórtice y el punto de máxima vorticidad, d , es mínima en los instantes iniciales y va aumentando a medida que pasa el tiempo de la forma $\sim t^{1/2}$.

A continuación se describe la forma de cálculo en el programa Fluent de la evolución temporal de la vorticidad, y la distribución espacial de la misma entorno al vórtice.

- **Implementación en Fluent.**

Mediante el uso del programa Fluent, podremos obtener todos los datos relacionados con la vorticidad relativos a nuestros casos de estudio.

En primer lugar, para obtener la distribución de la vorticidad en todo el volumen de control, deberemos definir la función vorticidad adimensional en Fluent. La forma de realizarlo es mediante la creación de una “Custom Field Function” dentro del menú “Define” de Fluent, de forma que la función vorticidad adimensional quede definida de la siguiente manera:

$$\omega^* = \omega \cdot \frac{D}{U} = \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \frac{D}{U} \quad (3.2.23)$$

De esta forma, haciendo uso de la vorticidad adimensional definida como “Custom Field Function” en Fluent, podremos obtener los gráficos de distribución de vorticidad incluidos en el *Anexo C*.

Para obtener la evolución temporal de la vorticidad haremos uso del mismo código y las mismas funciones que utilizamos en el *apartado 3.2.3* para calcular el centro del vórtice. Una vez hallado el centro del vórtice utilizando la función “on_demand_centro”, incluimos en esa misma función el cálculo de la vorticidad en dicho punto. Para ello modificamos la ecuación (3.2.23) para adaptarla al lenguaje de programación interpretable por Fluent:

$$w_vor = [C_DV DX(cell, thread) - C_DUDY(cell, thread)] * \frac{L_c}{U_c}; \quad (3.2.24)$$

, siendo L_c la longitud característica y U_c la velocidad característica, definidas en el *apartado 3.1*.

Finalmente realizamos la misma corrección parabólica indicada en [11], utilizando la sub-función “get_neighbour_cell”. Ambas funciones y sub-funciones se incluyen en el Journal que se encargará de iterar entre todos los casos de estudio, obteniendo de esta forma el valor de la vorticidad adimensional para cada instante de tiempo y para cada caso de estudio.

En último lugar, vamos a explicar la forma de obtener la distribución de la vorticidad adimensional a lo largo de una recta que pase por el centro del vórtice. De esta forma generaremos un gráfico en dos dimensiones en el que el eje de coordenadas representa el valor de la vorticidad adimensional, y el eje de abscisas representa la posición sobre la recta que pasa por el centro del vórtice. Debe notarse que la recta tendrá dirección radial, y será recorrida desde el eje de simetría hacia el exterior, de forma que el valor cero del eje de abscisas representa la posición sobre el eje de simetría.

Para ello se ha desarrollado un archivo Journal que recorrerá todos los instantes de tiempo obteniendo los datos de vorticidad. Para cada instante de tiempo, se traza una línea en dirección radial que pase por el centro del vórtice (calculado en el apartado anterior) mediante el menú de Fluent “surface/line-surface”. Por último, indicamos que vamos a realizar un gráfico bidimensional “plot”, que represente la función vorticidad adimensional definida en la ecuación (3.2.23), que recorra la recta definida anteriormente en dirección radial creciente y que guarde los resultados obtenidos en un archivo.

Una vez que tenemos los datos guardados en archivos, utilizando el programa Matlab, creamos las gráficas de los instantes de tiempo que queramos mostrar, combinando en una misma gráfica los tres casos de estudio.

3.2.5 Circulación.

Anteriormente, en el apartado 3.2.4 ya se definió la vorticidad como el rotacional de la velocidad según la ecuación general (3.2.7). En este apartado, vamos a analizar la circulación, Γ , un parámetro íntimamente relacionado con la vorticidad, y definido como la integral de línea de la velocidad alrededor de un contorno cerrado ∂S definido en el fluido:

$$\Gamma = \int_{\partial S} \bar{u} \cdot d\bar{l} \quad (3.2.25)$$

De esta manera, la circulación puede entenderse como una propiedad del contorno cerrado ∂S . Sin embargo, si utilizamos el Teorema de Stokes podremos transformar la ecuación (3.2.25) en una integral de superficie de la vorticidad que atraviesa una superficie S limitada por el mismo contorno ∂S .

$$\Gamma = \iint_S \omega \cdot dS \quad (3.2.26)$$

Por tanto, según la ecuación (3.2.26), la circulación, Γ , es el flujo de la vorticidad a través de la superficie S , o lo que es lo mismo, el número de líneas de corriente que atraviesan la superficie.

Para obtener la evolución de la circulación del vórtice principal en el tiempo, aplicaremos el Teorema de Kelvin de acuerdo con [16]. Por tanto, aplicaremos la derivada sustancial a la ecuación (3.2.25):

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \int_{\partial S} \frac{Du}{Dt} \cdot dl + \int_{\partial S} u \cdot \frac{D}{Dt}(dl) \quad (3.2.27)$$

podemos simplificar la ecuación (3.2.27) haciendo uso de la ecuación de cantidad de movimiento (3.1.6):

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \int_{\partial S} \frac{\nabla P}{\rho} dl + \nu \int_{\partial S} (\nabla^2 u) \cdot dl + \int_{\partial S} \bar{f}_m \cdot dl + \frac{1}{2} \int_{\partial S} \nabla(|u|^2) \cdot dl \quad (3.2.28)$$

Al estar integrando sobre una curva cerrada, ∂S , los términos cuarto y quinto de la ecuación (3.2.28) se anulan, por lo que reescribiendo la ecuación obtenemos:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \int_{\partial S} \frac{\nabla P}{\rho} dl + \nu \int_{\partial S} (\nabla^2 u) \cdot dl \quad (3.2.29)$$

Aplicando el Teorema de Stokes a la ecuación (3.2.29) obtenemos otra forma de expresar la evolución temporal de la circulación:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \iint_S \frac{\nabla \rho \times \nabla P}{\rho^2} dS + \nu \iint_S (\nabla^2 \omega) \cdot dS \quad (3.2.30)$$

Ambas ecuaciones, (3.2.29) y (3.2.30), representan la evolución temporal de la circulación en los casos de mezcla debido a que únicamente es en estos casos donde existen gradientes de densidades, y como consecuencia es en estos casos de estudio donde se genera vorticidad baroclínica. Sin embargo, en el caso homogéneo la ecuación que rige la evolución temporal de la circulación es:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \nu \int_{\partial S} (\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} = \nu \iint_S (\nabla^2 \omega) \cdot dS \quad (3.2.31)$$

Una vez definida la evolución temporal de la circulación, analizaremos el significado del término *número de formación*. Según *Gharib et al.* [2], en función del impulso que genera un pistón que introduce un fluido en el volumen de control, medido por el ratio $\frac{L}{D} \left(\frac{\text{longitud columna de fluido empujado}}{\text{diámetro orificio de entrada}} \right)$, se pueden registrar dos estados distintos en el fluido. Para bajos ratios $\frac{L}{D}$ se distingue únicamente un vórtice principal, mientras que para altos ratios se observa un vórtice principal seguido de un chorro de cola. Si comparamos la circulación total producida por el impulso del pistón, con la circulación resultante en el vórtice principal, se puede definir el tiempo de la transición entre estos dos estados del fluido. Se observa que el “*pinch-off*”, o separación del vórtice principal respecto del chorro que lo genera, siempre ocurre en un ratio $\frac{L}{D}$, también llamado *tiempo de formación*, de valor en torno a 4. Esta escala universal de tiempo se llama *número de formación*. En todos los casos, la máxima circulación que el vórtice principal puede absorber durante su formación ocurre en un rango de tiempos adimensionales, o *número de formación*, [3.6 - 4.5]. También se observó que el vórtice principal se separa del chorro con una circulación adimensional de valor en torno a 2.

- **Implementación en Fluent.**

Para cada caso de estudio, se han obtenido datos tanto de la evolución temporal de la circulación total, como de la circulación del vórtice principal de cabeza.

Para el cálculo de la circulación total en el volumen de control utilizaremos la ecuación (3.2.25), extendida al contorno, ∂S , igual al rectángulo que conforma el contorno del volumen de control. En dos de los lados que forman el contorno la velocidad es nula, mientras que en el orificio de entrada la velocidad es perpendicular al contorno, por lo que el único tramo del contorno, ∂S , donde la integral (3.2.25) no se anula es a lo largo del eje del chorro. Por tanto, la forma de calcular la circulación total se basa en integrar la aportación de cada celda del eje a la misma, siendo ésta el producto de la velocidad en la celda por la longitud de la misma. Finalmente, la circulación se adimensionaliza siempre de la siguiente forma:

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{U_j \cdot D} \quad (3.2.32)$$

El cálculo de la circulación total se incluye dentro de la función “on_demand_centro”, que como ya se ha indicado en otros apartados, se ejecutará para cada instante de tiempo mediante la creación de un archivo Journal.

A continuación se analizan los dos métodos utilizados para calcular la circulación en el vórtice principal de cabeza.

El primer método utilizado, denominado “*método 1*”, es el mismo que utiliza *Gharib et al.* [2] en sus artículos, mientras que el segundo método, denominado “*método 2*” desarrollado específicamente en el presente proyecto, es una adaptación del primero, útil en los casos en los que debido a las características del flujo no se observa “*pinch-off*”.

Ambos métodos se fundamentan en la ecuación (3.2.26), y son sensibles a la precisión con que se delimite el área de integración. La forma de delimitar el área de integración está basada en los isocontornos de vorticidad. Escogiendo un isocontorno de vorticidad de valor suficientemente bajo, para de esta forma estar seguros de abarcar todo el área que conforma el vórtice principal, podemos obtener la circulación total descargada integrando la vorticidad contenida en dicho isocontorno.

El área de integración es el factor que marca la diferencia entre los dos métodos de cálculo utilizados: en el método 1, el área de integración será el total del isocontorno de vorticidad hasta el momento en que se produzca el “*pinch-off*”. Desde ese momento, el área de integración será únicamente la relativa al vórtice principal (ver figura 4.5.2) garantizando de esta manera que la circulación que estamos calculando a partir de ese momento es la correspondiente únicamente al vórtice principal de cabeza.

Por el contrario, en el método 2, el área de integración es en todo momento el área aproximada del vórtice principal de cabeza. Debido a que no se observa “*pinch-off*”, no es posible garantizar en ningún momento que el área escogida es exactamente el área del vórtice principal, no obstante, como se observa en los resultados obtenidos en el *apartado 4.5*, debido a las características de los chorros estudiados tales como número de Froude relativamente altos, se puede delimitar con cierta precisión el vórtice principal de cabeza, obteniendo unos resultados acordes con la teoría.

Como se observa en la figura 3.2.1, aunque el vórtice principal es claramente visible, a la hora de delimitarlo no es posible discernir en ciertas zonas, qué parte del isocontorno de vorticidad es referido al vórtice y cual al chorro de cola. Por tanto, el hecho de integrar en todo momento la vorticidad en el área así delimitada, responde a dos ideas: la primera evaluar la circulación en todo momento en el vórtice principal de cabeza; y la segunda, comprobar que estamos delimitando aceptablemente el área de integración al no observar grandes discontinuidades en la evolución temporal del valor de la circulación.

Por tanto, la utilización del método 2 aporta una visión de lo que está sucediendo en el vórtice principal de cabeza según avanzamos en el tiempo, mostrando la absorción, difusión y generación (cuando aplique) de vorticidad en dicho vórtice.

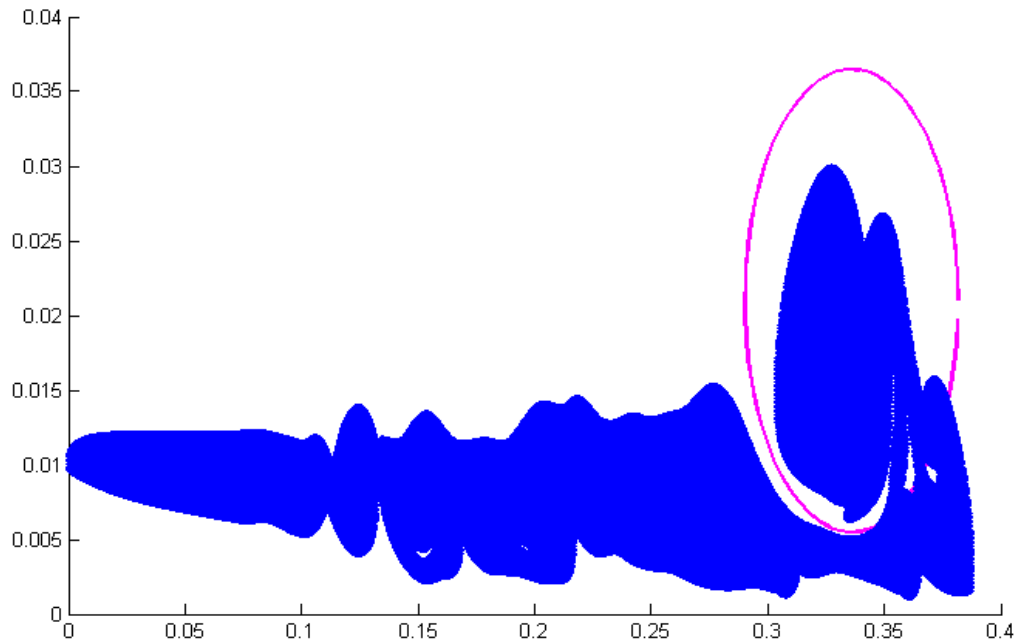


Figura 3.2.1. Isocontorno de vorticidad adimensional, $w^*=1$, en un tiempo adimensional, $t^*=19.72$, para el caso de flotabilidad negativa $Fr = 5$.

A continuación explicaremos la forma en que se han obtenido los datos. En primer lugar deberemos definir en Fluent una “Custom Field Function” a través del menú “Define”, que nos devuelva el valor de la circulación en cada celda:

$$\text{circ_cell} = [\text{cell_volume_2d}] * (\text{dradial_velocity_dx}) - (\text{daxial_velocity_dy}) \quad (3.2.33)$$

Una vez obtenida la circulación en cada celda, deberemos definir el isocontorno de vorticidad adimensional sobre el cual delimitaremos el área de integración. Para ello, dentro del menú “Surface”, seleccionamos “Iso-Clip” e indicamos el rango de valores para la generación de isocontornos de la variable vorticidad adimensional (definida en el apartado anterior). En este caso indicaremos el valor mínimo, dejando el valor máximo por defecto.

Por último, dentro del menú “File”, “Export”, guardamos en un archivo los valores de la circulación de cada celda contenida dentro de la superficie generada en el paso anterior.

Para cada caso de estudio e iteración temporal se deben obtener los datos de circulación en cada celda contenida en la superficie delimitada por los isocontornos, por tanto se hace uso de un archivo Journal que iterará entre todos los casos.

Una vez obtenidos los datos de la circulación, procedemos a analizarlos utilizando el programa Matlab, mediante el cual delimitamos el área específica que queremos integrar y adimensionalizamos la circulación según la ecuación (3.2.32). La precisión con que delimitemos el área a integrar determinará la existencia de discontinuidades en las gráficas. Como se ha indicado anteriormente, la forma de delimitar el área de integración es a través del programa Matlab, definiendo la ecuación de una elipse que contenga al vórtice principal y comprobando mediante gráficas similares a la figura 3.2.1, correspondientes a cada paso

temporal, si dichas elipses se ajustan bien al vórtice principal. Una vez delimitada el área del vórtice principal, se procede a integrar únicamente el valor de la circulación en cada celda, que se encuentre en el interior de la elipse anteriormente definida.

Finalmente, para cada instante de tiempo representamos el resultado de la integración de la circulación adimensional, generando las gráficas de evolución temporal de la misma.

3.2.6 Energía cinética.

En un estado de equilibrio, el volumen de control debe mantener una distribución espacial uniforme en cada una de sus propiedades, debiendo estar cada dV del mismo en equilibrio mecánico y térmico con el resto de elementos de volumen adyacentes. Sin embargo, si ciertas propiedades del volumen de control no son uniformes, como puedan ser los gradientes de velocidad creados al introducir el chorro de agua en el volumen de control, se observan intercambios en las propiedades mecánicas, generados por los gradientes iniciales. Estos intercambios producidos entre elementos de volumen adyacentes, siempre tienden a llevar al fluido a un estado de equilibrio en el que desaparezcan las discontinuidades. El conjunto de todos los intercambios entre los elementos de volumen constituyen los fenómenos de transporte.

De acuerdo con lo anterior, la energía cinética es la energía involucrada en los fenómenos de transporte entre elementos de volumen. Debe tenerse en cuenta que la energía cinética calculada es la contenida en el volumen de control y no únicamente en el chorro de agua.

La energía cinética de un fluido en un volumen V es:

$$E_k = \iiint_V \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 \cdot dV \quad (3.2.34)$$

, siendo ρ la densidad del fluido y u la velocidad en el centro de masas de cada dV .

Mediante la ecuación (3.2.34) relacionamos la energía cinética con la velocidad, e integrando en todo el volumen de control podremos obtener la energía cinética total en el mismo.

A continuación, vamos a obtener la relación entre la energía cinética y la vorticidad. Como ya se explicó en el *Capítulo 2*, estamos trabajando con líquidos incompresibles, y con simetría axial, por tanto, podemos considerar el caso de estudio bidimensional, siendo la siguiente ecuación para la energía cinética válida según *Saffman* [15]:

$$E_k = \pi \iint_S \omega \varphi dS \quad (3.2.35)$$

, siendo φ la función de corriente definida por la solución de $\omega = -\nabla^2 \varphi$.

Mediante las ecuaciones (3.2.34) y (3.2.35), la primera de ellas extendida al volumen y la segunda referenciada al problema axisimétrico bidimensional que nos ocupa, se puede observar la relación entre la energía cinética, y la velocidad y vorticidad. Al aumentar cualquiera de los dos parámetros también aumentará la energía cinética contenida en el volumen de control.

Al igual que se realizó con las ecuaciones que describen el movimiento del chorro, a fin de simplificar las ecuaciones que definen la evolución de la energía cinética, y para que la dependencia de las mismas sea en función de un menor número de variables, se procederá a adimensionalizar la energía cinética de la siguiente manera:

$$E_k^* = \frac{E_k}{\frac{\pi \cdot \rho_j \cdot v_0^2 \cdot D^3}{4}} \quad (3.2.36)$$

La relación entre la energía cinética y la existencia del número de formación fue explicada por *Gharib et al.* [2], mediante el uso de un modelo analítico basado en el Principio variacional de Kelvin-Benjamin. Se definió un parámetro de energía cinética adimensional de la forma:

$$\alpha = \frac{E_k}{I^{1/2} \Gamma^{3/2}} \quad (3.2.37)$$

, donde E_k es la energía cinética definida por la ecuación (3.2.35), I es el impulso hidrodinámico definido por la ecuación (3.2.67), y Γ es la circulación definida por (3.2.26). De acuerdo con el modelo utilizado por *Gharib et al.*, la presencia de un único vórtice estacionario no es posible cuando la energía cinética adimensional generada por el pistón que inyecta el chorro, $\alpha_{piston}(t)$, es menor que la energía límite del vórtice principal, α_{lim} . Por tanto, si $\alpha_{piston}(t) < \alpha_{lim}$, puede ocurrir, o que el vórtice principal difunda vorticidad al chorro de cola, o que no acepte más vorticidad para mantener $\alpha = \alpha_{lim}$ en el vórtice principal. α_{lim} , es un parámetro desconocido que depende del pistón y del número de Reynolds, $\alpha_{lim}[U_p; Re_p]$. Basado en las medidas de la energía cinética, impulso y circulación del vórtice principal, el Principio de Kelvin-Benjamin, predice correctamente el rango de números de formación observados en los experimentos.

- **Energía cinética en el caso teórico sin viscosidad.**

A la hora de analizar la evolución de la energía cinética en los diferentes casos de estudio que se plantean en este proyecto, es interesante tener una idea de cómo afecta la viscosidad del problema a la energía cinética.

A priori, podemos aventurar que la viscosidad del problema afectará a la energía cinética de forma que frene el avance de las partículas en movimiento, y por tanto, disminuyendo la energía cinética del chorro.

A continuación se procede a desarrollar la formulación que nos permitirá representar gráficamente y analizar la evolución de la energía cinética en función del tiempo. Las condiciones sobre las que se basa este desarrollo son las mismas que en los casos prácticos, con la salvedad de que no se va a tener en cuenta la viscosidad.

De acuerdo con lo anterior, comenzaremos describiendo el problema que se plantea. El chorro de agua se introduce de forma continua y a velocidad constante, U_j , en el volumen de control a través de un orificio de diámetro D , y en la misma dirección que el *eje x* de coordenadas en sentido creciente. En su avance, el chorro podrá modificar el área de su

sección transversal, que denominaremos como $A(x)$, y que se corresponde con una sección de espesor dx .

De acuerdo con lo anterior, el caudal del chorro de agua, Q_0 , deberá ser constante a medida que el chorro avanza en el interior del volumen de control, e igual a:

$$Q_0 = \rho_j \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot U_j = \rho_j \cdot A_0 \cdot U_j \quad (3.2.38)$$

, siendo ρ_j , la densidad del chorro y A_0 , el área del orificio de entrada del chorro.

Utilizando la ecuación (3.2.38), y teniendo en cuenta que el caudal es constante, se verifica que para un espesor diferencial cualquiera del chorro, dx , de sección transversal $A(x)$, y con velocidad $u(x)$, se deberá cumplir la siguiente igualdad:

$$Q_0 = \rho_j \cdot A_0 \cdot U_j = \rho_j \cdot A(x) \cdot u(x) \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{A_0 \cdot U_j}{u(x)} \quad (3.2.39)$$

La masa contenida en una sección de chorro, dx , es igual a:

$$dm = \rho_j \cdot A(x) \cdot dx \quad (3.2.40)$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones (3.2.39) y (3.2.40), la energía cinética contenida en una sección transversal de chorro de espesor dx , será igual a:

$$dE_k = \frac{1}{2} \cdot u(x)^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \rho_j \cdot A_0 \cdot U_j \cdot u(x) \cdot dx \quad (3.2.41)$$

Integrando la ecuación (3.2.41) entre el punto inicial del chorro y una posición x cualquiera en la que haya chorro, obtendremos la energía cinética en ese tramo de chorro. Por tanto, si integramos hasta la posición final del frente del chorro, obtendremos la energía cinética total del chorro.

No obstante, la ecuación (3.2.41) depende de la velocidad en cada sección transversal de chorro, por tanto, llegados a este punto es necesario evaluar si sobre el chorro actúan fuerzas que aceleren su movimiento, o por el contrario, el chorro se mueve en ausencia de fuerzas.

Hasta este momento no se ha realizado ninguna distinción entre el caso homogéneo del chorro de agua que se descarga en agua, y el caso de mezcla en el que el chorro de agua se descarga en una mezcla de alcohol y agua. La diferencia entre ambos casos radica en la diferencia de densidades entre el chorro y el volumen de control, que provoca la aparición de fuerzas de flotabilidad.

Como indica el Principio de Arquímedes, el chorro de agua al introducirse en el seno de otro fluido de densidad distinta, no sólo se ve afectado por la acción de la fuerza de gravedad, sino también por las fuerzas de flotabilidad. Como resultado de dicho equilibrio de fuerzas el chorro de agua se verá afectado por una aceleración que denominaremos, a , y que será calculada posteriormente.

Desde este momento, en adelante se hará referencia al caso de mezcla, teniendo en cuenta que en el caso homogéneo de agua en agua no se produce ninguna aceleración en el chorro de agua, y por tanto los cálculos que siguen también serán válidos siempre que se fije $a = 0$.

Como se ha indicado anteriormente, al referirnos al caso de mezcla, estamos considerando un movimiento uniformemente acelerado, de aceleración, a . Por tanto, la variación de la velocidad en cada sección transversal de chorro puede ser calculada utilizando las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$u(t) = U_j + a \cdot t \quad (3.2.42)$$

$$x(t) = U_j \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (3.2.43)$$

Despejando el tiempo, t , en (3.2.42) e incluyéndolo en (3.2.43):

$$u(x)^2 = U_j^2 + 2 \cdot a \cdot x \quad (3.2.44)$$

Combinando las ecuaciones (3.2.41) y (3.2.44) obtenemos finalmente la variación de la energía cinética en el chorro:

$$dE_k = K \cdot \sqrt{U_j^2 + 2 \cdot a \cdot x} \cdot dx \quad (3.2.45)$$

, siendo K una constante igual a:

$$K = \frac{1}{2} \cdot \rho_j \cdot A_0 \cdot U_j = \frac{1}{8} \cdot \rho_j \cdot \pi \cdot D^2 \cdot U_j \quad (3.2.46)$$

No obstante, en lugar de integrar la ecuación (3.2.45), se puede aplicar a la ecuación (3.2.41) el siguiente cambio de variables:

$$x \rightarrow t$$

$$dx \rightarrow (U_j + a \cdot t) \cdot dt$$

De forma que la ecuación (3.2.41) se simplifica respecto a (3.2.45):

$$dE_k = K \cdot u(t) \cdot (U_j + a \cdot t) \cdot dt = K \cdot (U_j + a \cdot t)^2 \cdot dt \quad (3.2.47)$$

Integrando la ecuación (3.2.47) entre un tiempo inicial, $t = 0$, y un tiempo t , obtenemos la ecuación (3.2.48) que define la evolución de la energía cinética en el tiempo:

$$E_k = \frac{K}{3 \cdot a} \cdot [(U_j + a \cdot t)^3 - U_j^3] \quad (3.2.48)$$

A continuación, para determinar la aceleración resultante en el chorro, a , deberemos utilizar el Principio de Arquímedes de forma que relacione el peso del chorro y el peso del volumen de masa de mezcla desalojada:

$$m_j \cdot g - \rho_m \cdot V_m \cdot g = m_j \cdot a \quad (3.2.49)$$

,siendo m_j , la masa del chorro en el interior del volumen de control, ρ_m , la densidad de la mezcla y V_m , el volumen de mezcla desalojado que es igual al volumen del chorro en el interior del volumen de control, V_j .

Desarrollando la ecuación (3.2.49) obtendremos la aceleración resultante del chorro, a , que posteriormente podremos relacionar con el número de Froude a partir de su definición:

$$a = g \cdot \left[1 - \frac{\rho_m}{\rho_j} \right] \quad (3.2.50)$$

$$F_r = \frac{U_j^2}{\left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_j} \right) g \cdot D} = \frac{U_j^2}{a \cdot D} \Rightarrow a = \frac{U_j^2}{F_r \cdot D} \quad (3.2.51)$$

Finalmente, relacionando las ecuaciones (3.2.48) y (3.2.51), y operando obtendremos la evolución de la energía cinética en función del tiempo para el caso teórico de mezcla en ausencia de viscosidad:

$$E_k = \frac{\rho_j \cdot \pi \cdot U_j^3 \cdot D^2}{8} \cdot \left[t + \frac{U_j}{F_r \cdot D} \cdot t^2 + \frac{U_j^2}{3 \cdot F_r^2 \cdot D^2} \cdot t^3 \right] \quad (3.2.52)$$

Una vez obtenida la ecuación (3.2.52), para poder analizarla conjuntamente con los resultados obtenidos deberemos adimensionalizarla utilizando las ecuaciones (3.2.36), para la adimensionalización de la energía cinética, y (3.1.27), para la adimensionalización del tiempo:

$$t^* = \frac{t}{D/U_j}$$

$$E_k^* = \frac{1}{2} \cdot t^* + \frac{1}{2 \cdot F_r} \cdot t^{*2} + \frac{1}{6 \cdot F_r^2} \cdot t^{*3} \quad (3.2.53)$$

Como se puede observar en la ecuación (3.2.53), la energía cinética adimensional únicamente depende del valor del número de Froude y del tiempo. A medida que aumenta el tiempo la energía cinética aumenta, mientras que el efecto del número de Froude es el inverso.

Para el caso del chorro homogéneo de agua en agua, el número de Froude es infinito, y por tanto la variación de la energía cinética adimensional es igual a:

$$E_k^* = \frac{1}{2} \cdot t^* \quad (3.2.54)$$

Ambas ecuaciones, (3.2.53) y (3.2.54) serán utilizadas en el *apartado 4.6* a la hora de evaluar el efecto de la viscosidad en la evolución de la energía cinética.

- **Implementación en Fluent.**

Al igual que en apartados anteriores, a la hora de calcular la energía cinética en el volumen de control se ha optado por realizar una función llamada “on_demand_Energy”, en lenguaje de programación C, definida en Fluent como UDF, que nos devuelva el valor de la energía cinética en el volumen de control cada vez que lo ejecutamos. A continuación se describe conceptualmente la función que nos permite calcular la energía cinética. No obstante, el código utilizado, se encuentra en el *Anexo E*.

La forma de proceder se basa en la ecuación (3.2.34), que define la energía cinética total como la suma en todo el volumen de la energía cinética de cada dV que lo compone. El equivalente en Fluent de cada término de la ecuación (3.2.34), se define a continuación:

- Cada dV se corresponde en Fluent con el volumen de cada celda de la malla de nuestro caso. Al estar trabajando con casos con simetría axial, definido de tal forma en Fluent, se debe tener en cuenta que cuando el programa nos devuelve el volumen de la celda mediante la función “C_VOLUME()”, en realidad nos devuelve el volumen de la celda extendido en un radián. Por tanto, para calcular la energía cinética en todo el volumen de control debemos multiplicar por $2 \cdot \pi$.
- u , es el módulo de la velocidad en cada celda.
- ρ , es la densidad de la celda. En el caso homogéneo de agua en agua, el valor de ρ será constante e igual a la densidad del agua. Sin embargo, en el caso de mezcla, el valor de ρ varía, y por tanto se debe obtener en cada celda mediante la función “C_R()”.
- La integral de la ecuación (3.2.34) se extiende a todo el volumen de control, sin embargo, con el objetivo de agilizar los cálculos en el post-procesado de los datos, la integral será evaluada en un volumen definido por el rectángulo de revolución de altura igual a 2.5 veces el diámetro, D , de entrada de chorro, y ancho definido por la posición axial de la celda situada sobre el eje de revolución que cumple que su velocidad es 50 veces menor que la velocidad de entrada del chorro.

Una vez definida la función, se incluirá una llamada a la misma dentro del archivo Journal encargado de abrir cada iteración temporal, de forma que para cada tiempo se obtenga un valor de la energía cinética en el volumen de control.

3.2.7 Impulso hidrodinámico.

Existen varias formas de entender el significado del impulso hidrodinámico. Una de ellas es la definida por Kelvin (1868) y Lamb (1932), según la cual si se parte de un fluido en reposo, el impulso hidrodinámico puede ser interpretado como el impulso mecánico total generado por fuerzas no conservativas aplicadas sobre el fluido, que generan instantáneamente, desde el reposo, el estado de movimiento en que se encuentra el conjunto del fluido en cada tiempo t .

A continuación desarrollaremos la ecuación que determina el impulso hidrodinámico, basándonos y adaptando a nuestro caso el trabajo de *Shivamoggi* [17]. Volviendo a escribir la ecuación de continuidad de Navier-Stokes (3.1.1), junto con la condición de incompresibilidad del problema, ecuación (3.1.2), tenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Se puede asegurar que cuando dicha condición de incompresibilidad se cumple, la ecuación de continuidad de Navier-Stokes implica la existencia de un potencial vectorial $A(x,t)$ que cumple:

$$\rho v = \text{rot } A = \nabla \times A \quad (3.2.55)$$

Para determinar $A(x,t)$, aplicaremos el rotacional a ambos lados de la ecuación (3.2.55), junto con la condición, $\text{div } A = \nabla \cdot A = 0$, que fija la variación de $A(x,t)$:

$$\rho \omega = \text{rot rot } A = \text{grad div } A - \nabla^2 A \quad (3.2.56)$$

$$\nabla^2 A = -\rho \omega \quad (3.2.57)$$

Quedando finalmente la ecuación (3.2.57), que no es otra que la ecuación de Poisson con la solución:

$$A = \frac{\rho}{4\pi} \iiint_V \frac{\omega'}{|x - x'|} dx' \quad (3.2.58)$$

, siendo $\omega' = \omega(x', t)$, y evaluándose la integral en V que representa un volumen de fluido encerrado por una superficie S . A continuación desarrollamos la expresión $\frac{1}{|x - x'|}$, teniendo en cuenta que $r \equiv |x|$:

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{r} + \frac{x \cdot x'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.2.59)$$

Combinando las ecuaciones (3.2.58) y (3.2.59), tenemos:

$$A \sim \frac{\rho}{4\pi r} \iiint_V \omega' dx' + \frac{\rho}{4\pi r^3} \iiint_V (x \cdot x') \cdot \omega' dx' + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (3.2.60)$$

El primer término de la ecuación (3.2.60) se anula sobre cualquier volumen encerrado por una superficie S en la que se cumpla $\omega \cdot \hat{n} = 0$, como puede comprobarse a continuación:

$$\iiint_V (\omega')_i dx' = \iiint_V \frac{\partial(x'_i \cdot \omega'_j)}{\partial x'_j} dx' = \oint_S x'_i \omega'_j \cdot \hat{n} dS' = 0 \quad (3.2.61)$$

En cuanto al segundo término de la ecuación (3.2.60), deben tenerse en cuenta las siguientes dos ecuaciones definidas por *Saffman* [15]:

$$(x \cdot x') \cdot \omega' = x \times (\omega' \times x') + (\omega' \cdot x')x' \quad (3.2.62)$$

$$\iiint_V (\omega' \cdot x) \cdot x' dx' + \iiint_V (x' \cdot x) \omega' dx' = 0 \quad (3.2.63)$$

Utilizando las ecuaciones (3.2.61) – (3.2.63), la ecuación (3.2.60) queda de la siguiente forma:

$$A \sim \frac{\rho}{8\pi r^3} x \times \iiint_V \omega' \times x' dx' \quad (3.2.64)$$

A continuación debe notarse que el potencial vectorial, A , generado por un dipolo de fuerza M en el origen cumple la siguiente ecuación:

$$A = \frac{M \times x}{r^3} \quad (3.2.65)$$

Comparando las ecuaciones (3.2.64) y (3.2.65) obtenemos:

$$M = \frac{1}{4\pi} I \quad (3.2.66)$$

Por tanto, el impulso hidrodinámico, I , es igual a cualquiera de las siguientes expresiones, quedando referido al volumen o al caso axisimétrico, respectivamente:

$$I = \frac{\rho}{2} \iiint_V x \times \omega dV \quad (3.2.67)$$

$$I = \pi \rho \iint_S \omega \cdot r^2 dS \quad (3.2.68)$$

El parámetro utilizado para adimensionalizar el impulso hidrodinámico es el siguiente:

$$I^* = \frac{I}{\rho \cdot U_j \cdot D^3} \quad (3.2.69)$$

Anteriormente, en el apartado 3.2.5, se hizo referencia a los experimentos realizados por *Gharib et al.* [2], y se definió el ratio $\frac{L}{D}$, como el parámetro de medida del impulso que genera

un pistón que introduce un fluido en el volumen de control. Para ratios $\frac{L}{D}$ suficientemente bajos (menor que 4) se observan vórtices individuales, sin embargo, para ratios mayores el vórtice principal deja de absorber energía y circulación provenientes del chorro, resultando en un flujo caracterizado por un vórtice principal y un chorro de cola, momento que se denomina “*pinch-off*” y que ocurre en un ratio igual a 4, llamado número de formación. De acuerdo con lo anterior, el “*pinch-off*” se relaciona con la idea de que el mecanismo que genera el vórtice no es capaz de suministrar más energía al mismo, lo cual es consistente con el requerimiento de que el vórtice principal alcanza un máximo de energía con respecto al impulso que lo genera. Como se indicó en el *Capítulo 1*, este máximo de energía en el vórtice puede tener implicaciones en la existencia de un pulso óptimo en los flujos cardiacos, o en la propulsión mediante pulsos de ciertos animales acuáticos.

En el trabajo llevado a cabo por *Krueger y Gharib* [3], se muestra cómo la formación del vórtice principal contribuye proporcionalmente más al impulso por unidad de ratio $\frac{L}{D}$, que el chorro de cola. De esta forma se demuestra el papel dominante que juega el vórtice principal a la hora de generar impulso en el periodo de formación del vórtice principal, subrayando la importancia del “*pinch-off*”.

El periodo inicial de formación del vórtice principal, se relaciona con la sobrepresión generada a la salida del pistón. Esta sobrepresión proporciona un impulso adicional únicamente durante la formación del vórtice principal, no observándose efectos significativos de la misma tras el “*pinch-off*”. El significado del impulso de presión durante la formación del vórtice principal, está relacionado con la aceleración del fluido contenido en el volumen de control, que se encontraba en reposo previamente a la inyección del chorro.

Una vez producido el “*pinch-off*”, el impulso generado por el pistón puede ser descompuesto entre el impulso debido al chorro de cola, I_{TJ} , y el impulso en el vórtice principal, I_{ring} :

$$I = I_{TJ} + I_{ring} \quad (3.2.70)$$

$$I_{TJ} \approx \rho \int_{t_p}^t \int_A U_j^2 dS d\tau = \rho \int_{t_p}^t U_j^2 \cdot A d\tau \quad (3.2.71)$$

, siendo $U_j^2 \cdot A$, el producto de la velocidad de salida del chorro por el área del orificio de salida del pistón, que al tener un perfil de velocidad uniforme en todo el área de salida hace constante el producto. El impulso en el vórtice principal, I_{ring} , es igual a la ecuación (3.2.68) extendida al área que contiene el vórtice principal.

- Implementación en Fluent.

El cálculo del impulso hidrodinámico se ha realizado mediante el uso de lenguaje de programación C interpretable por Fluent. Al igual que se realizó en el caso de la energía cinética, se incluirá el cálculo del impulso hidrodinámico en la función “on_demand_Energy”, de forma que al ejecutar la función también nos devuelva el valor del impulso hidrodinámico en el volumen de control.

A continuación se explicará conceptualmente la forma y ecuaciones utilizadas para calcular el impulso hidrodinámico. En caso de que se quiera analizar el código, éste se encuentra en el *Anexo E*.

Todos los casos de estudio tienen una simetría axial, por lo que tal y como se ha analizado anteriormente en el *apartado 3.2.6*, a la hora de seleccionar la ecuación de cálculo para el impulso hidrodinámico deberemos tener en cuenta la definición del volumen de cada celda realizada por el programa Fluent. De acuerdo con lo anterior, utilizaremos la ecuación (3.2.67) como base para el cálculo del impulso hidrodinámico.

Debido a la simetría axial de los casos de estudio, el impulso hidrodinámico es un vector contenido en el plano $\theta \equiv cte$, utilizando la notación en coordenadas cilíndricas. Por tanto, debe notarse que para un punto cualquiera del volumen de control cuyo vector de posición es \bar{x} respecto de los ejes de coordenadas definidos en el *Capítulo 2* figura 2.1.2, la componente en dirección radial del impulso hidrodinámico se anula debido a que los casos de estudio son axisimétricos.

Definiendo α como el ángulo que forma el vector de posición \bar{x} con el eje de simetría, y teniendo en cuenta que el vector impulso hidrodinámico es el producto vectorial de $\bar{x} \times \bar{\omega}$, como se indica en la ecuación (3.2.67), obtenemos las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{r}{|\bar{x}|} \quad (3.2.72)$$

$$|\bar{I}_x| = |\bar{I}| \cdot \text{sen}(\alpha) \quad (3.2.73)$$

, siendo r la distancia radial al centro de cada celda e I_x la componente en dirección axial del impulso hidrodinámico, I .

Por tanto, combinando las ecuaciones (3.2.67), (3.2.72) y (3.2.73) obtenemos la ecuación de cálculo del impulso hidrodinámico para cada instante de tiempo que implementaremos en Fluent:

$$I_x = \frac{\rho}{2} \iiint_V r \cdot \omega \, dV = \rho\pi \iiint_V r \cdot \omega \, dV_{celda} \quad (3.2.74)$$

Como se puede observar, la ecuación (3.2.74) está extendida a todo el volumen de control y es función del volumen de cada celda, obtenido mediante la macro definida en Fluent “C_VOLUME()”, que equivale al volumen de un radián.

El equivalente en Fluent de cada término de la ecuación (3.2.74) se encuentra explicado en el *apartado 3.2.6*, a excepción de la vorticidad definida en la ecuación (3.2.24).

Finalmente, el procedimiento para obtener el valor del impulso hidrodinámico será a través de la función “on_demand_Energy” incluida dentro del Journal que iterará entre todos los pasos temporales.

Capítulo 4

Evaluación de los resultados

4.0 Introducción.

Después de haber proporcionado en el *Capítulo 3* una visión teórica acerca de los parámetros de estudio de este proyecto, en el este capítulo cuarto analizaremos en detalle los resultados obtenidos, proporcionando una explicación práctica fundamentada en los conceptos teóricos anteriormente expuestos.

Antes de comenzar a analizar los resultados obtenidos relacionados con los distintos parámetros que caracterizan la evolución del chorro de agua en el interior del volumen de control, se muestra al lector de forma general la evolución del chorro de agua en el tiempo a medida que penetra en el interior del volumen de control. De esta forma se proporciona una visión de conjunto sobre lo que más tarde analizaremos en detalle.

En los siguientes apartados se estudian en profundidad los distintos parámetros que caracterizan la evolución del chorro de agua y del torbellino principal en cada uno de los tres casos de estudio. De tal manera que al finalizar la lectura de este *Capítulo 4*, se poseerán conocimientos prácticos suficientes como para entender el proceso y la evolución de los distintos parámetros involucrados en la inyección de un chorro de agua en un volumen de control, tanto homogéneo como de mezcla.

4.1 Evolución del chorro de agua.

Para cada caso de estudio se mostrará la evolución del chorro de agua de forma que se proporcione al lector una visión global de lo que ocurre en el interior del volumen de control.

A la hora de representar la evolución del chorro de agua en los distintos casos de estudio, se han seleccionado cinco tiempos adimensionales distintos entre $t^* = 0.5$ y el final de la simulación, $t^* = 20$, a saber: 0.5, 5.5, 10.5, 15.5 y 20. A continuación se ha seleccionado un parámetro que defina la evolución del chorro de agua, y para cada tiempo adimensional seleccionado se ha obtenido la representación gráfica de dicho parámetro en el volumen de control.

En la figura 4.1.1 se observa el caso del chorro de agua que se introduce en el volumen de control formado únicamente por agua. A la hora de mostrar la evolución del chorro de agua en el caso homogéneo se ha escogido como parámetro de análisis la evolución del escalar-0, que es el menos difusivo y por tanto el que mejor se ajusta a la evolución del chorro. En cambio, en el caso de mezcla debido a la presencia de distintas especies, se ha escogido como parámetro de análisis la evolución de la fracción másica de agua que representa el chorro.

Como se puede observar en la figura 4.1.1, a medida que el chorro de agua se introduce en el volumen de control se va formando un torbellino principal en la parte frontal del mismo que aumenta de tamaño al avanzar el chorro. También se observa la formación de torbellinos secundarios a lo largo del chorro, y el hecho de que es en los propios torbellinos donde se produce el mayor mezclado entre el chorro y el volumen de control, como se puede observar haciendo uso de la escala incluida en el gráfico.

En las figuras 4.1.2 y 4.1.3 se muestra la evolución del chorro de agua que es introducido en una mezcla de agua y alcohol, teniendo cada caso un número de Froude distinto, $Fr = 10$, el primero y $Fr = 5$, el segundo. Ambos casos se consideran casos de mezcla al haber distintas especies implicadas, por tanto, el parámetro de análisis utilizado para observar la evolución del chorro en estos casos es la variación del campo de densidades en el volumen de control.

En ambos casos se observa la formación del torbellino principal en el frente del chorro, así como la formación de torbellinos secundarios a lo largo del mismo. Al igual que en el caso del chorro de agua en agua, es en los torbellinos donde se produce el mayor mezclado entre el chorro y el volumen de control.

Comparando los tres casos de estudio se observa cómo en los momentos iniciales la evolución del chorro de agua es similar en todos ellos. Sin embargo, si comparamos en los tres casos la evolución del chorro de agua en tiempos mayores, se observa cómo a medida que disminuye el número de Froude, o lo que es lo mismo, el chorro de agua es más pesado en relación con el volumen de control, se producen antes tanto la formación de torbellinos secundarios como un mayor mezclado.

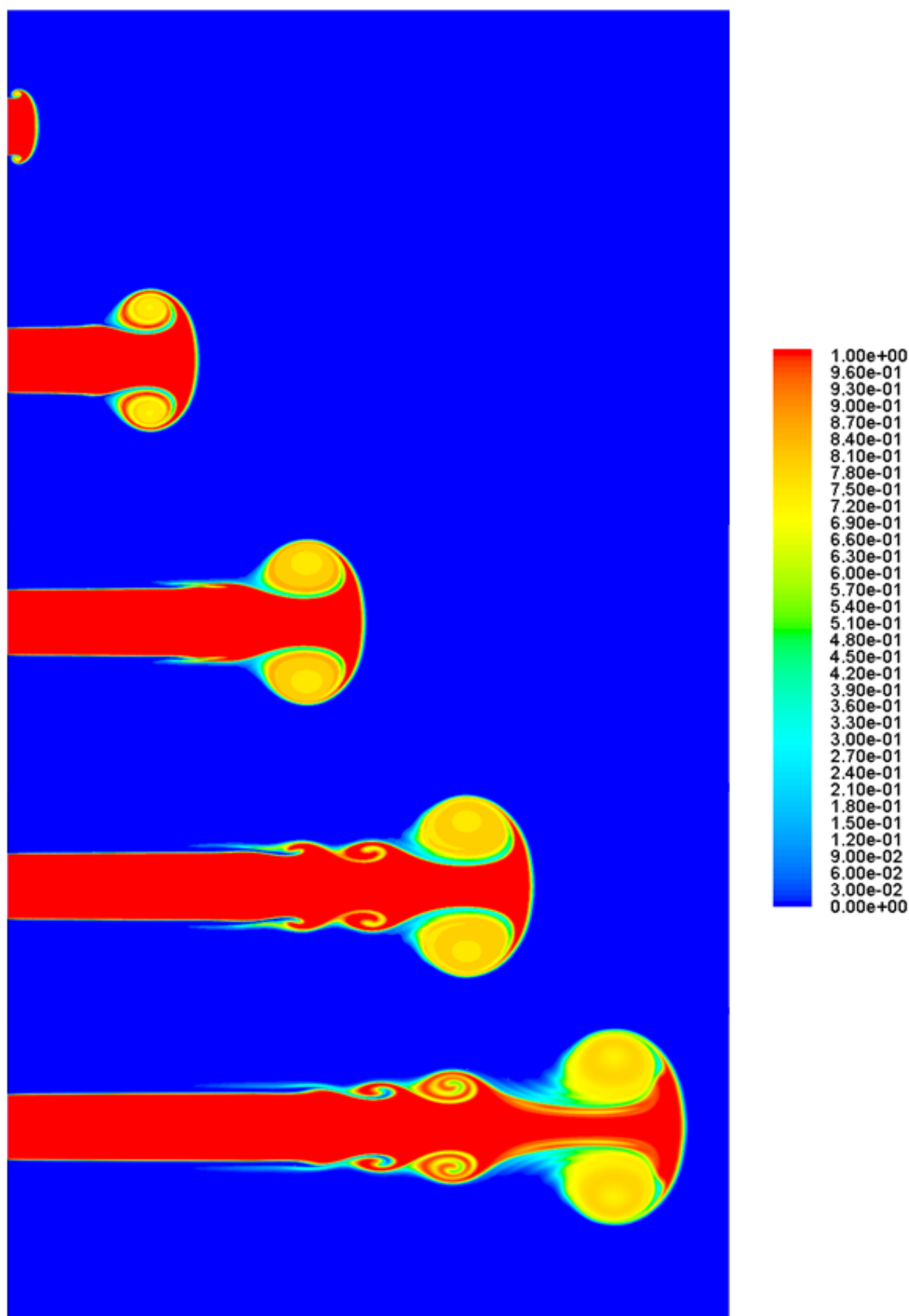


Figura 4.1.1. Evolución de la concentración del escalar-0 en la descarga de agua en agua para los tiempos adimensionales 0.538, 5.473, 10.524, 15.514 y 20.080 respectivamente.

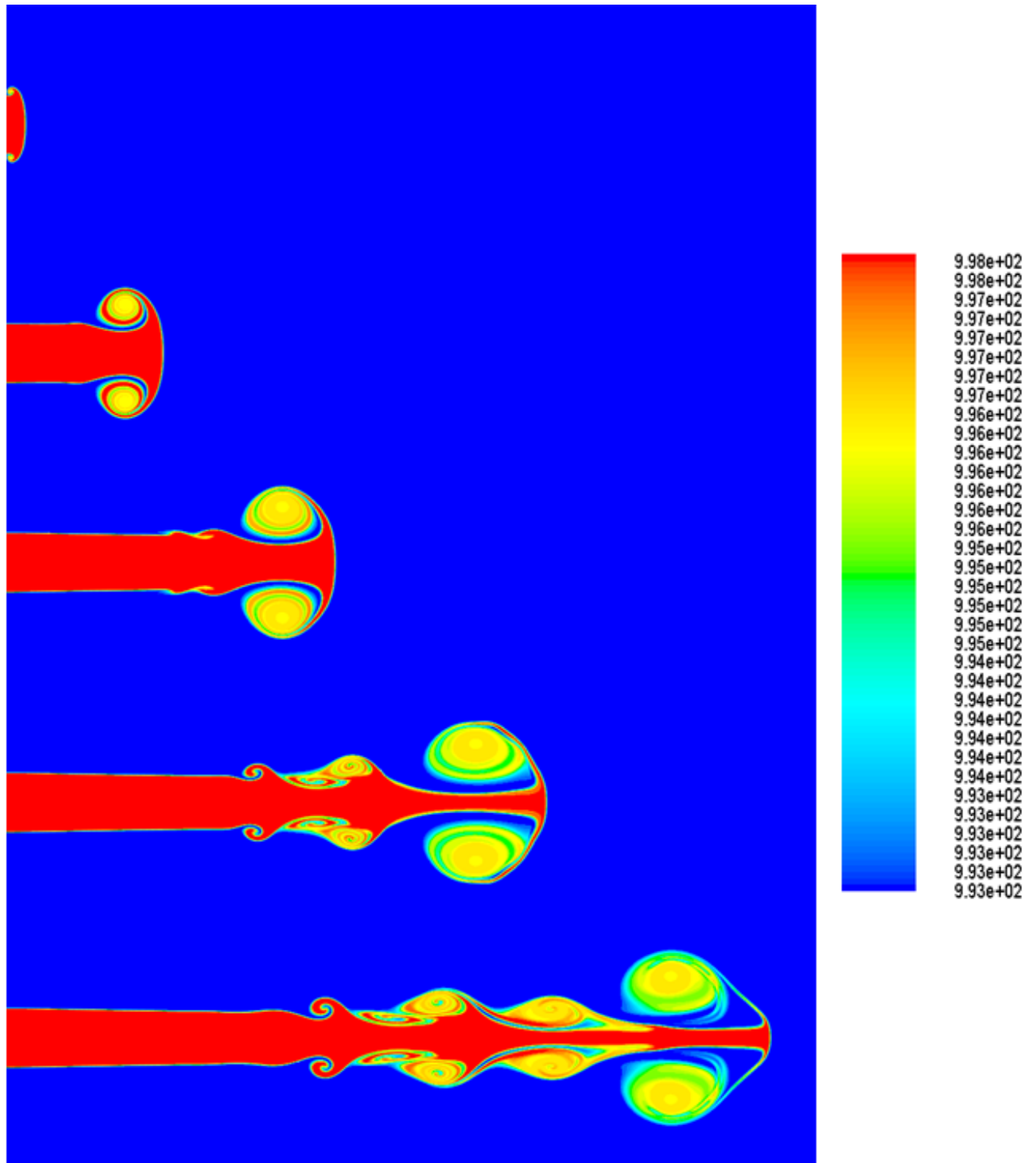


Figura 4.1.2. Evolución del campo de densidades en la descarga de agua en mezcla de agua y alcohol con $Fr = 10$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.526, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.

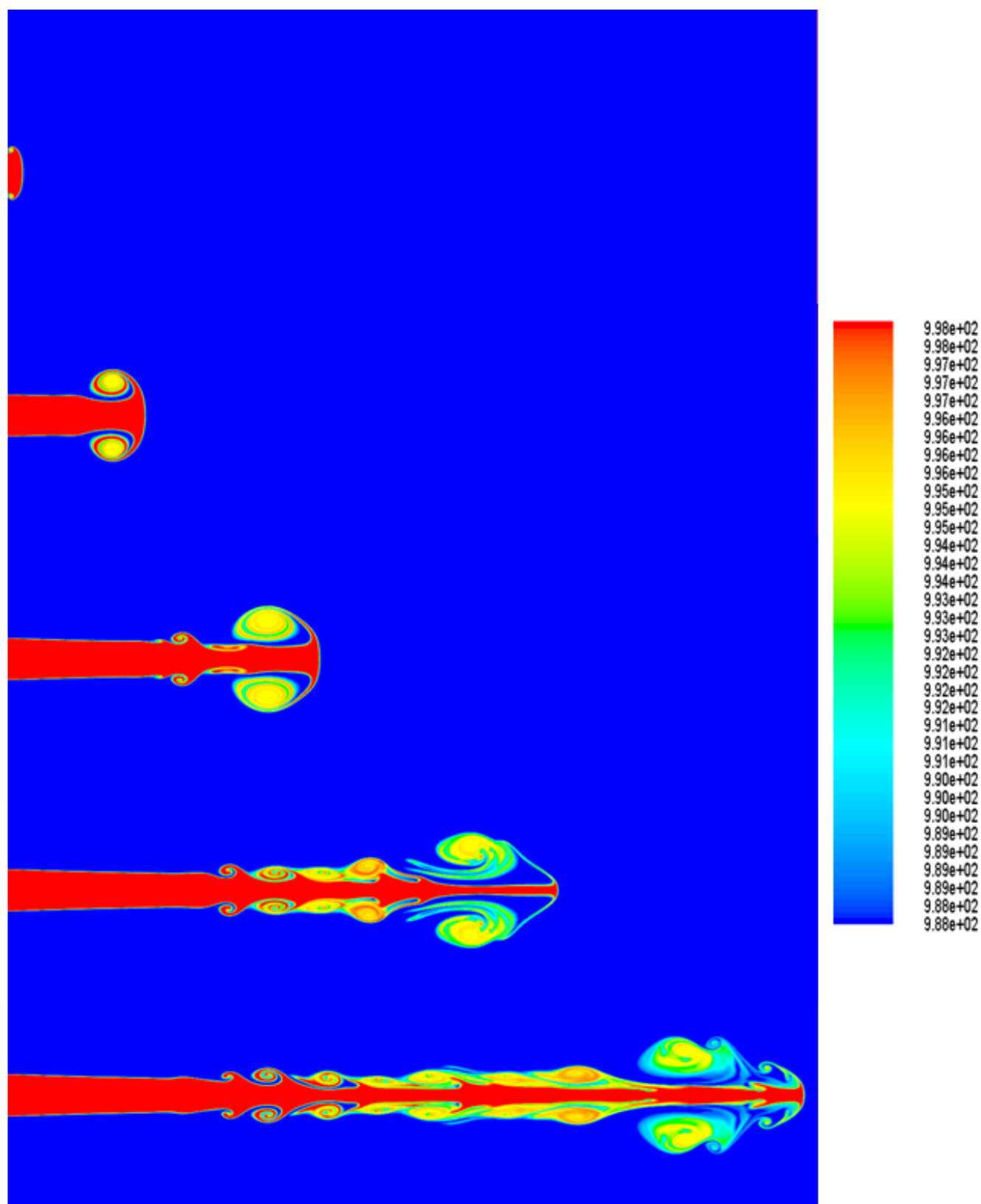


Figura 4.1.3. Evolución del campo de densidades en la descarga de agua en mezcla de agua y alcohol con $Fr = 5$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.501, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.

4.2 Posición y velocidad del frente del chorro.

A continuación mostraremos la evolución de la posición y la velocidad del frente del chorro de agua, a medida que avanza en el interior del volumen de control. Se analizará en primer lugar el caso del chorro de agua que se introduce en agua, posteriormente se describirán conjuntamente los dos casos de mezcla, $Fr = 10$ y $Fr = 5$, y finalmente se hará un análisis conjunto.

4.2.1 Caso homogéneo.

Como se ha visto anteriormente en los apartados 3.2.2 y 4.1.1, el parámetro utilizado para evaluar la posición y velocidad del frente del chorro de agua ha sido el escalar menos difusivo, escalar-0 .

A continuación representamos en la figura 4.2.1 la evolución de la posición adimensional del frente del chorro de agua en función del tiempo adimensional.

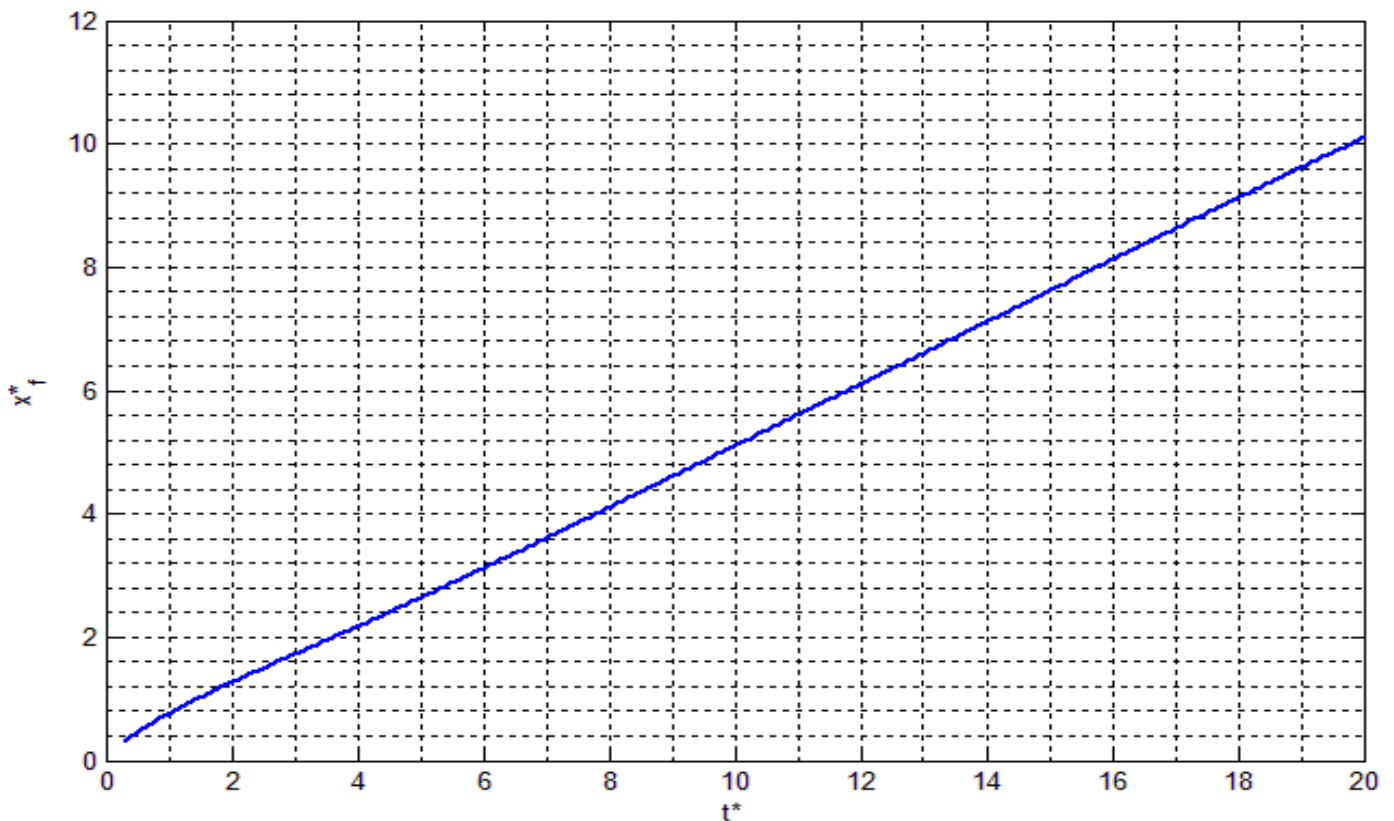


Figura 4.2.1. Evolución temporal de la posición del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de agua en agua.

Como se observa en la figura 4.2.1, a partir de un determinado tiempo $t^* \sim 3$, la posición del frente del chorro evoluciona de una forma lineal creciente, con una pendiente entorno a 0.5, a medida que avanzamos en el tiempo.

Antes de analizar el proceso que tiene lugar en los instantes iniciales, y para tener una visión global de lo que está sucediendo en el frente del chorro, representamos a continuación la evolución de la velocidad en dicho punto.

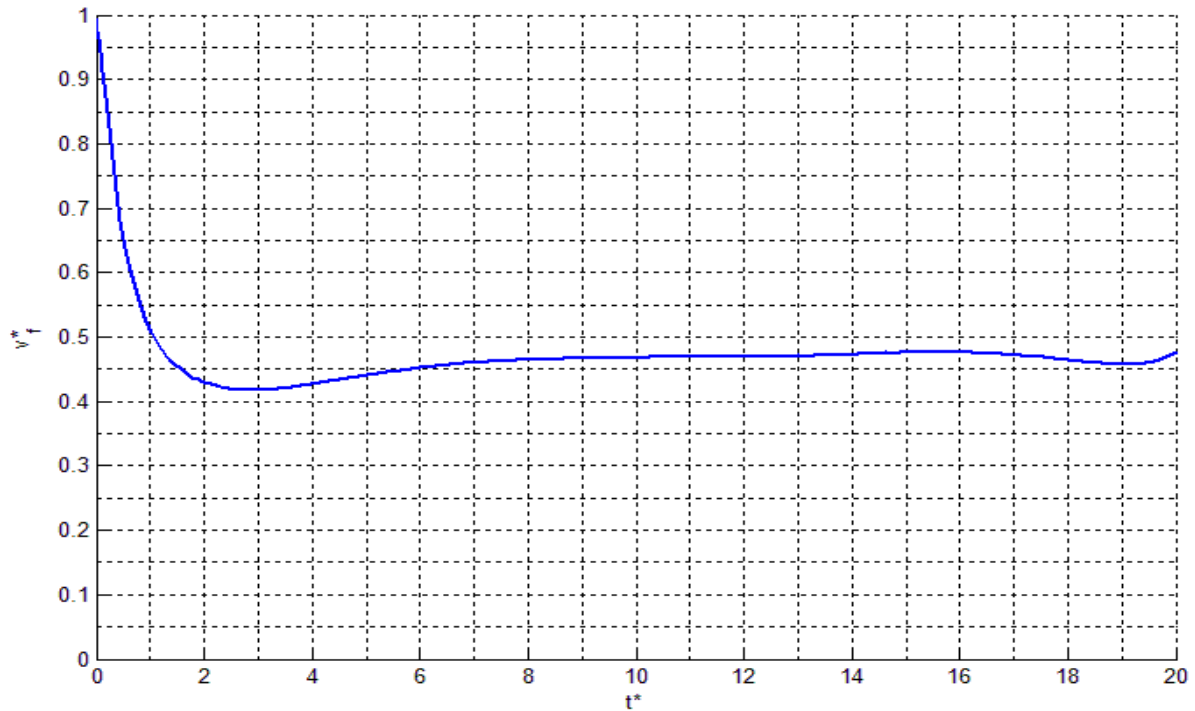


Figura 4.2.2. Evolución temporal de la velocidad del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de agua en agua.

Como se puede observar en la figura 4.2.2, al comienzo la velocidad del frente del chorro es igual a la velocidad de entrada, pero a medida que el chorro avanza en el ambiente se ve frenado por el efecto de la viscosidad. La velocidad en el frente del chorro disminuye hasta un tiempo adimensional en torno a $t^* \sim 3$. Posteriormente, la velocidad en el frente del chorro aumenta ligeramente debido a que el torbellino de cabeza, al aumentar su tamaño genera una presión sobre el eje del chorro que provoca el aumento de la velocidad hasta mantenerse en torno a un valor de 0.5, lo cual era de esperar al ser igual a la pendiente de la recta de la figura 4.2.1, que representa la penetración del chorro en el volumen de control.

Analizando conjuntamente ambas gráficas, 4.2.1 y 4.2.2, se comprueba que desde el instante inicial hasta un tiempo adimensional en torno a $t^* \sim 3$, la penetración del chorro en el volumen de control es más rápida debido a que la velocidad del frente del chorro es mayor en esos instantes. Sin embargo, es en esos instantes iniciales cuando se registran los mayores gradientes de velocidad entre el frente del chorro y el volumen de control que está en reposo. Como consecuencia de esa diferencia de velocidades se generan unos esfuerzos viscosos

proporcionales a esos gradientes de velocidad, por tanto mayores en los instantes iniciales, que frenan el avance del frente del chorro.

Las fuerzas viscosas frenarán al chorro hasta que se produzca un equilibrio entre la fuerza impulsora que genera la velocidad en la entrada del chorro y las fuerzas viscosas en el frente del mismo, esto ocurre en torno a un tiempo adimensional $t^* \sim 3$.

Como se ha explicado anteriormente, el distinto comportamiento del chorro en los instantes iniciales es debido a la adaptación del mismo a las condiciones en que se encuentra el volumen de control. Dicho periodo de adaptación dependerá de las propiedades del chorro, y para el caso homogéneo de chorro de agua en agua será considerado $t_{adap}^* = 3$.

4.2.2 Casos de flotabilidad negativa.

En este apartado se estudiará de forma conjunta la evolución de la posición y la velocidad del frente del chorro en los dos casos de mezcla que se estudian en el presente proyecto, $Fr = 5$ y $Fr = 10$.

En primer lugar, a diferencia del caso homogéneo en el que se incluyeron escalares pasivos, en el caso de mezcla se han definido dos especies distintas, el agua que representa el chorro, y la mezcla agua-alcohol que representa el volumen de control. Por tanto, como se indicó en el apartado 3.2.2, a la hora de definir la evolución del frente del chorro se ha escogido como parámetro de análisis la fracción másica de agua.

A continuación, en la figura 4.2.3 se representa la evolución en el tiempo de la posición del frente del chorro para los casos de mezcla $Fr = 5$ y $Fr = 10$.

Como se observa en la figura 4.2.3, la penetración del frente del chorro en ambos casos es siempre creciente y con un comportamiento exponencial, siendo la penetración del chorro cada vez mayor.

Si consideramos un mismo instante de tiempo, la penetración del chorro en el volumen de control es mayor en el caso $Fr = 5$. Esto es así debido al efecto de la gravedad, ya que en el caso $Fr = 5$ la densidad de la mezcla que compone el volumen de control es menor que en el caso $Fr = 10$, y por tanto, el chorro de agua en relación con el fluido que lo rodea es más pesado en el caso $Fr = 5$.

Sin embargo, como también se puede observar en la figura 4.2.3, en los instantes iniciales la diferencia entre ambos casos es menor, debido a que los efectos de la gravedad todavía no son apreciables.

A continuación se muestra en la gráfica 4.2.4, la evolución temporal de la velocidad en el frente del chorro. La velocidad del frente del chorro en ambos casos disminuye en los instantes iniciales debido al efecto de las fuerzas viscosas. Al llegar a un punto de equilibrio entre las fuerzas que favorecen el movimiento (principalmente la fuerza impulsora que genera la velocidad de entrada) y las fuerzas viscosas, la velocidad en el frente del chorro comienza a aumentar en ambos casos debido a la acción de la gravedad. Dicho punto de equilibrio, es distinto en ambos casos y depende de las propiedades del chorro y el volumen de control.

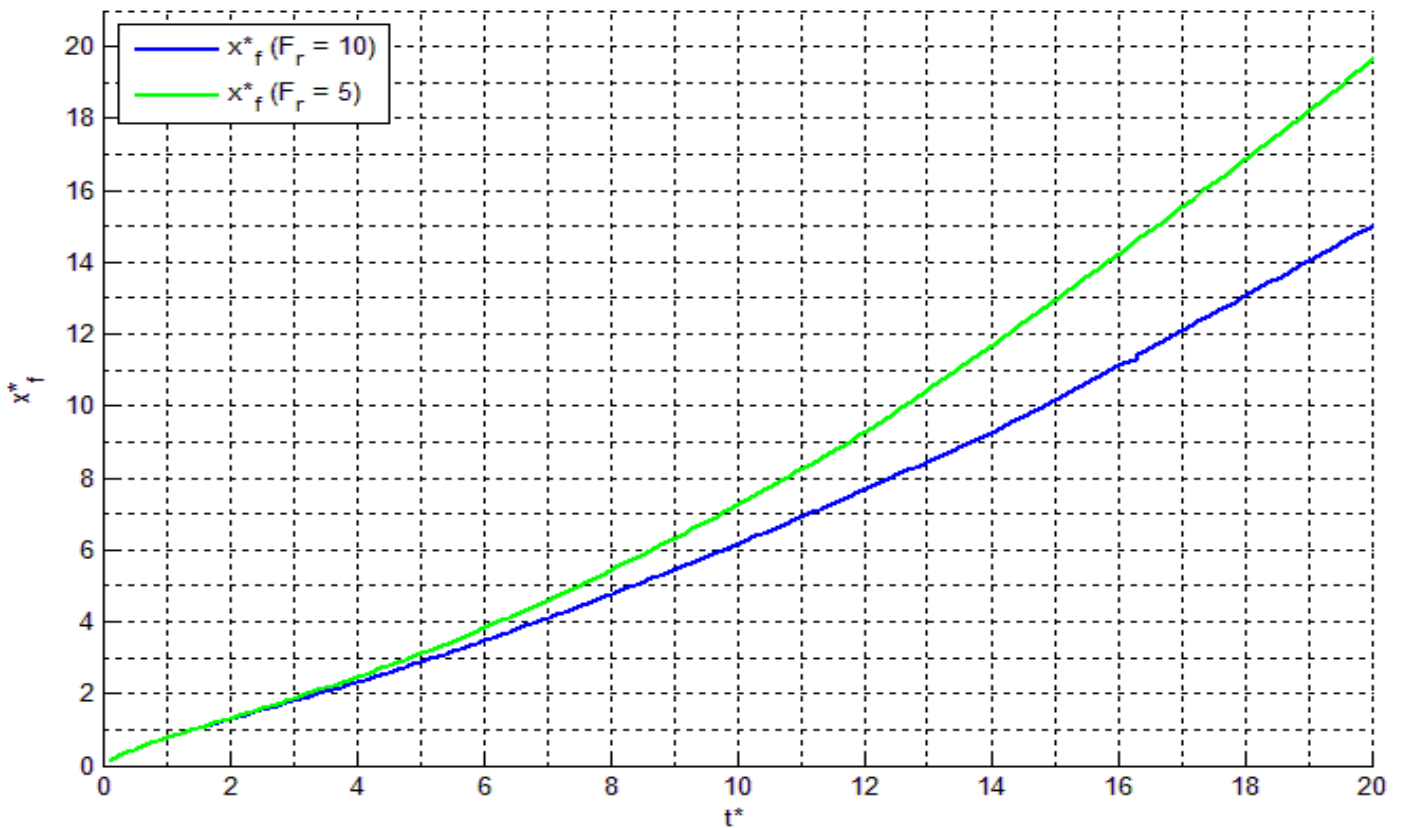


Figura 4.2.3. Evolución temporal de la posición del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de los casos de mezcla.

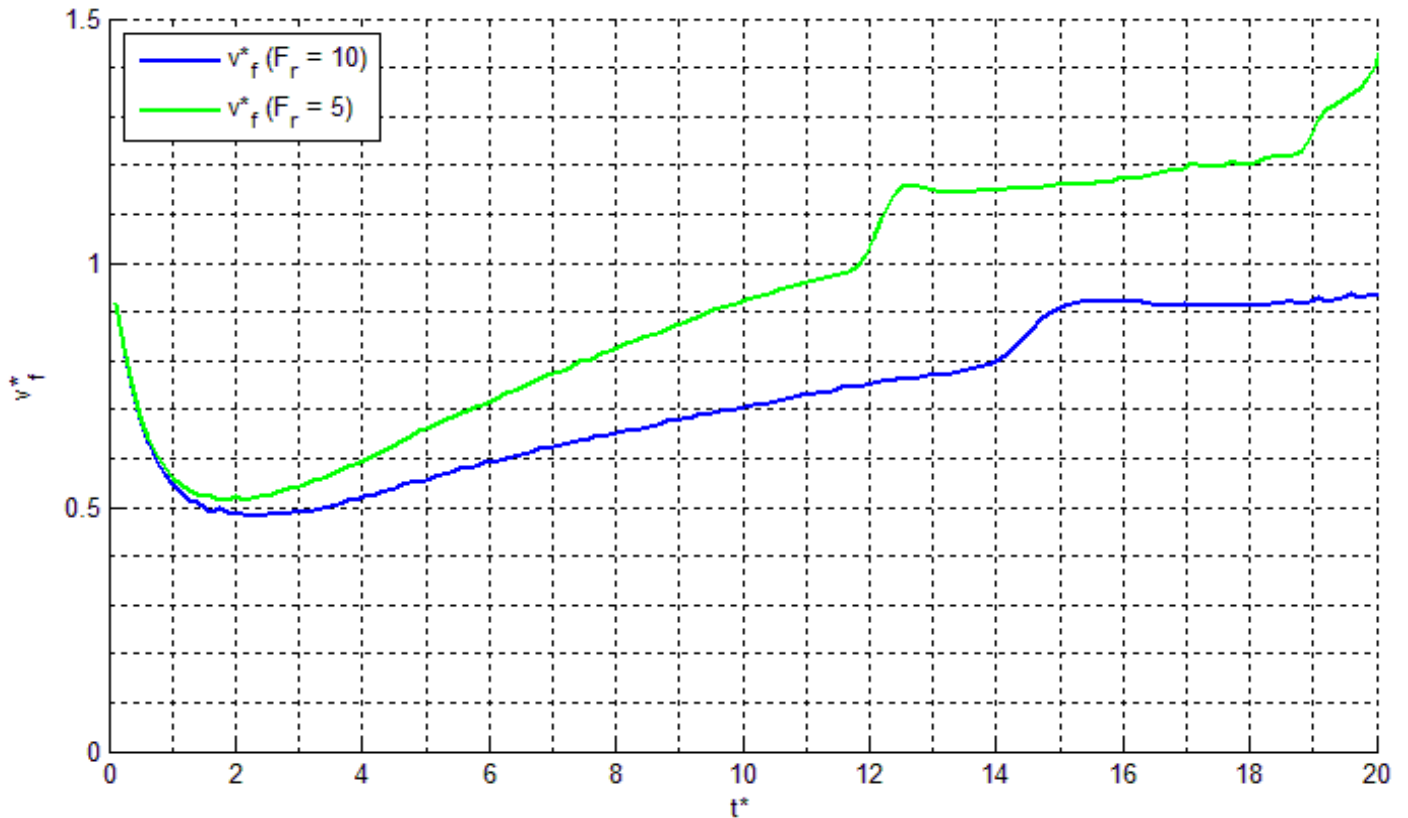


Figura 4.2.4. Evolución temporal de la velocidad del frente del chorro adimensionalizada en la descarga de los casos de mezcla.

En la figura 4.2.4, se observa claramente cómo el efecto de la gravedad es mayor sobre el chorro más pesado, caso $Fr = 5$, haciendo que la velocidad disminuya menos en los instantes iniciales, y posteriormente que aumente cada vez más en relación con el caso $Fr = 10$.

Como se puede observar en la misma gráfica 4.2.4, en los tiempos adimensionales $t^* = 12$ y $t^* = 14$, para los casos $Fr = 5$ y $Fr = 10$, respectivamente, se observan aumentos de la velocidad del frente del chorro en un corto intervalo de tiempo. Dichos aumentos de velocidad se explican debido a la absorción de torbellinos secundarios por parte del torbellino principal de cabeza. El torbellino secundario de menor tamaño, en su avance en el interior del volumen de control se encuentra con el torbellino principal, este hecho provoca la compresión del torbellino secundario sobre el eje, lo cual crea una sobrepresión en el mismo que favorece el movimiento del chorro acelerándolo.

Debe tenerse en cuenta, que el gráfico 4.2.4 representa la velocidad del frente del chorro, y por tanto, la compresión del torbellino secundario se produce antes de observar el aumento de velocidad en el gráfico. Esta diferencia de tiempo se corresponde con el tiempo que tarda el aumento de velocidad en transmitirse al frente del chorro.

4.2.3 Estudio conjunto del caso homogéneo y los casos de flotabilidad negativa.

Finalmente, se procede al análisis conjunto de la evolución en el tiempo de la posición y la velocidad en el frente del chorro, mediante el uso de las figuras 4.2.5 y 4.2.6 representadas más adelante.

En ambas gráficas se observan claramente dos regiones diferenciadas, la primera de ellas se corresponde con los instantes iniciales en los que el efecto de la gravedad no es apreciable y por tanto, las gráficas de los tres casos de estudio siguen la misma evolución llegando a ser coincidentes unas con otras.

En segundo lugar, se observa cómo a partir de un determinado tiempo adimensional, llamado anteriormente tiempo de adaptación, las diferencias en la posición y la velocidad del frente del chorro para cada caso de estudio sí son apreciables, siendo el tiempo de adaptación diferente en cada caso y dependiente de las características del chorro y del volumen de control. Pasado el periodo de adaptación del chorro en cada uno de los tres casos, para un mismo tiempo adimensional, la penetración y la velocidad en el frente del chorro son mayores en los casos de mezcla que en el caso homogéneo. Esto se debe al efecto de la gravedad, que es apreciable en los casos de mezcla debido a la diferencia de densidades entre el chorro y el volumen de control.

Además de la acción de la gravedad, los propios torbellinos que se van formando a lo largo del eje del chorro, generan una presión sobre el eje que se traduce en un empuje a favor del avance del chorro, y por tanto, de la penetración del mismo. Como se puede observar en las gráficas del *apartado 4.1*, este hecho favorece la penetración de los casos de mezcla al formarse en ellos un mayor número de torbellinos secundarios.

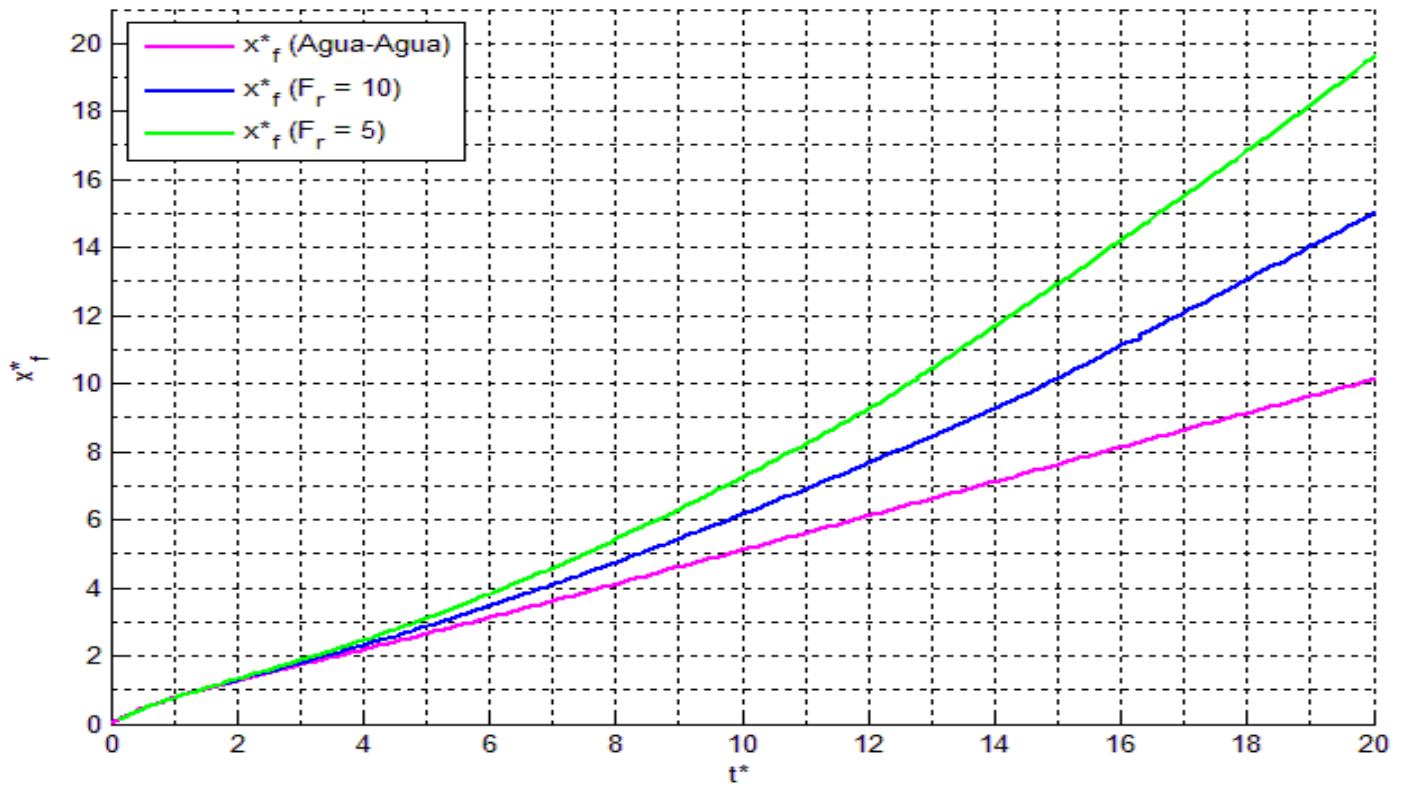


Figura 4.2.5. Evolución temporal de la posición adimensional del frente del chorro en todos los casos de estudio.

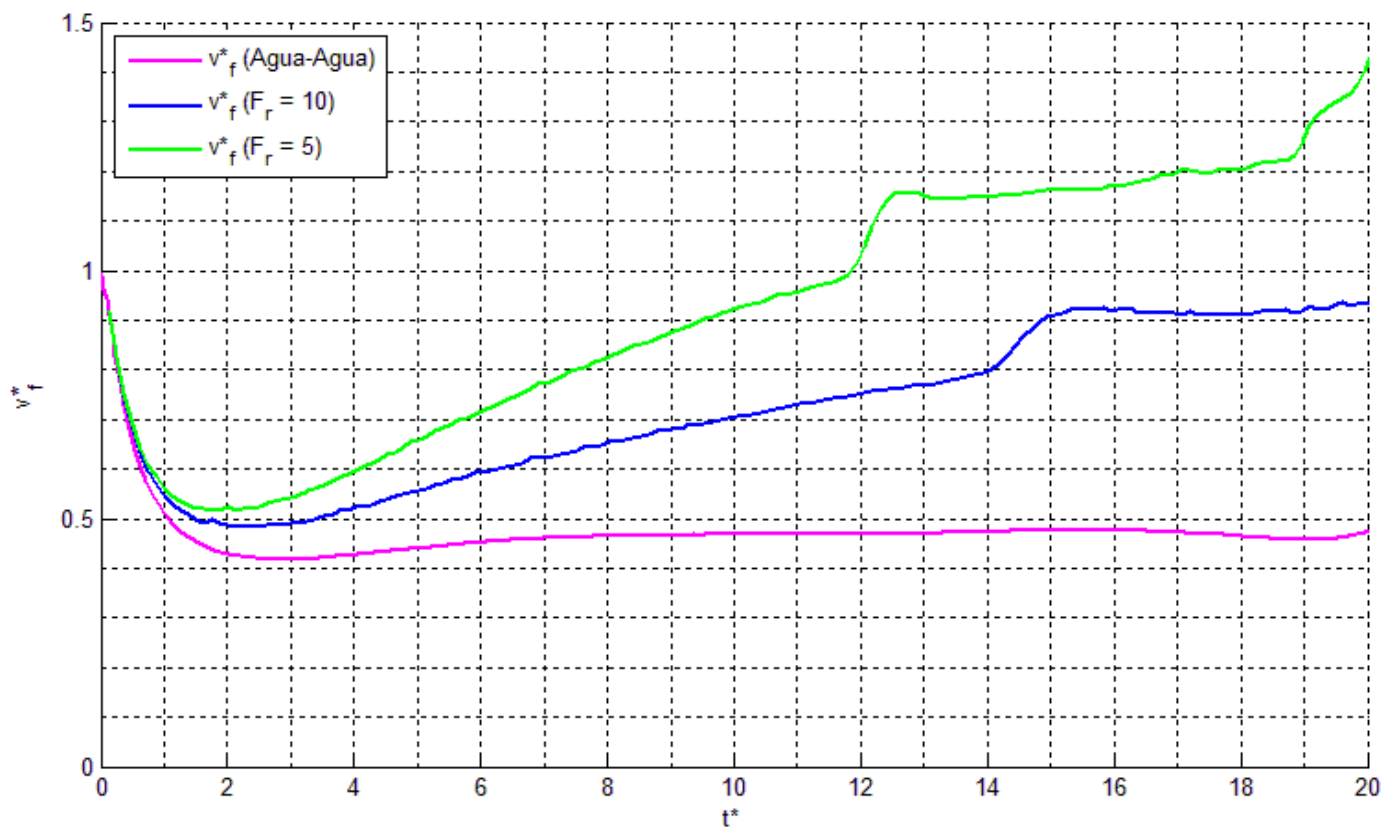


Figura 4.2.6. Evolución temporal de la velocidad adimensional del frente del chorro en todos los casos de estudio.

4.3 Posición del vórtice de cabeza.

En este apartado se analiza la evolución temporal de la posición del vórtice de cabeza en los tres casos de estudio llevados a cabo. Se analiza en primer lugar el caso homogéneo de la descarga del chorro de agua en agua, a continuación el caso de mezcla y en último lugar se realiza una comparación de los tres casos estudiados.

En esta ocasión se representan en primer lugar los resultados obtenidos en gráficas conjuntas donde figuran los tres casos estudiados. En la figura 4.3.1 se representa la evolución en el tiempo de la coordenada axial del centro del vórtice de cabeza, mientras que en la figura 4.3.2 se representa la evolución en el tiempo de la coordenada radial del centro del vórtice de cabeza. En la figura 4.3.2. se ha añadido una línea recta discontinua de color rojo que representa el radio del orificio de entrada. En adelante, cuando hagamos referencia a la posición del vórtice, nos referiremos a la posición del centro del vórtice de cabeza.

Para un mayor detalle en cuanto al proceso de obtención de la posición del centro del vórtice consúltense el apartado 3.2.3 y el Anexo E.

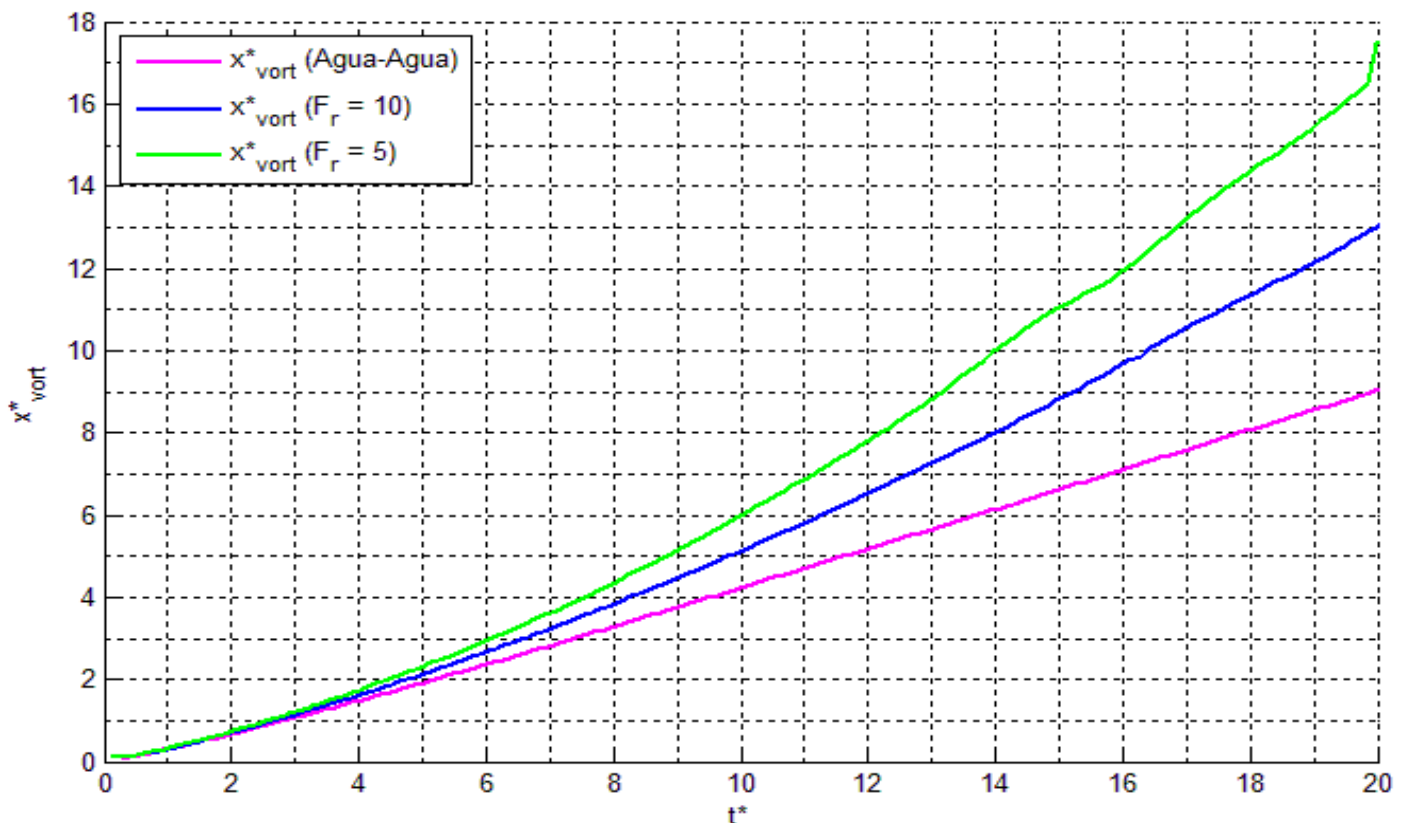


Figura 4.3.1. Evolución temporal de la coordenada axial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio.

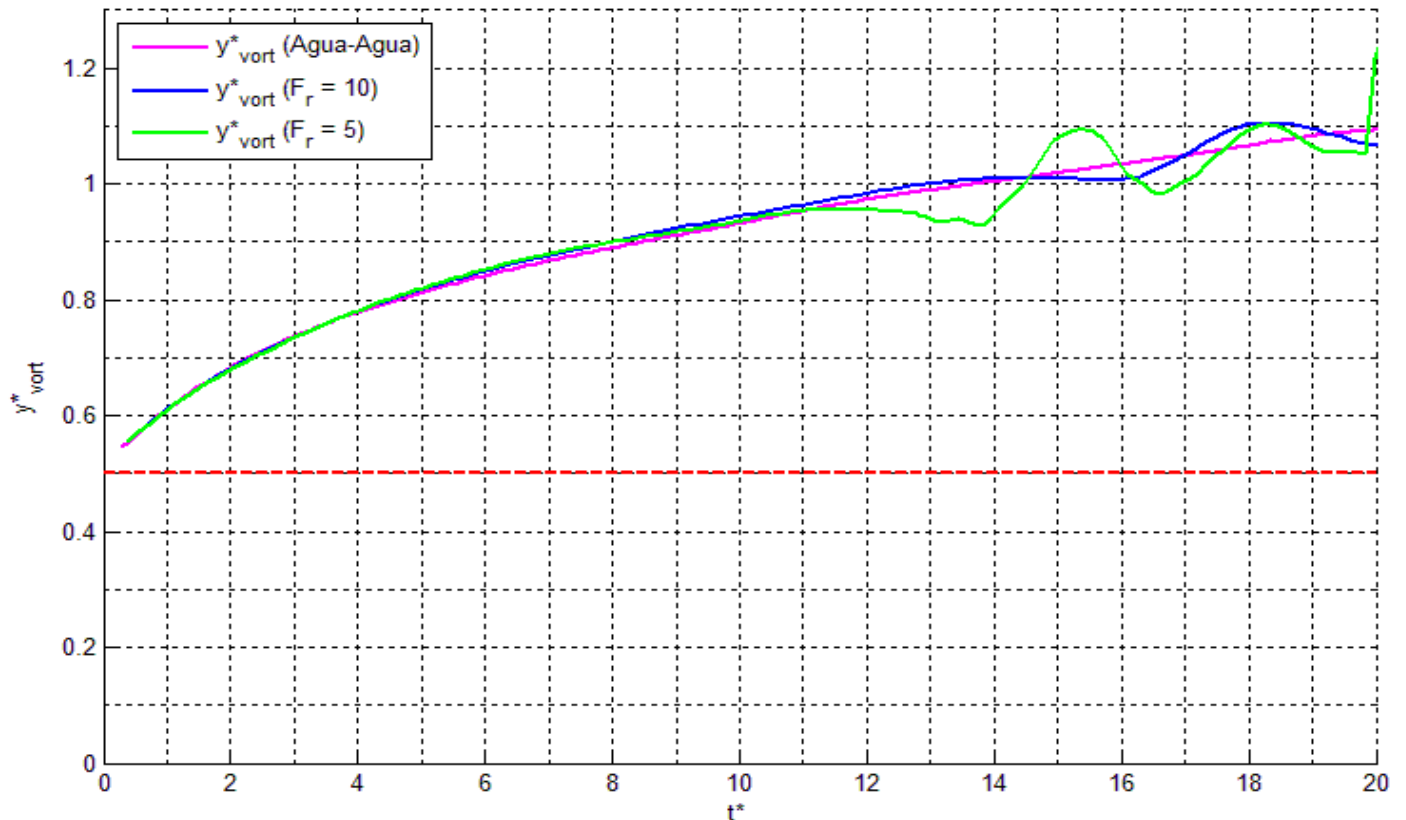


Figura 4.3.2. Evolución temporal de la coordenada radial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio.

4.3.1 Caso homogéneo.

En primer lugar analizaremos la evolución de la coordenada axial del centro del vórtice utilizando la figura 4.3.1. Como se puede observar, desde la formación del vórtice la posición axial de su centro aumenta con el tiempo. En los primeros instantes la posición del vórtice aumenta más rápidamente debido al empuje procedente de la inyección de chorro, sin embargo, para tiempos mayores de $t^* = 4$, la evolución de la coordenada axial del centro del vórtice es lineal.

Si observamos la figura 4.3.2, la coordenada radial del vórtice comienza cercana a la posición del orificio de entrada, pero a medida que avanza el tiempo se va separando del eje del chorro. También se observa que la velocidad de avance del vórtice en la dirección radial, marcada por la pendiente de la curva, es mayor en los instantes iniciales. La explicación a ambos hechos se encuentra en que en los instantes iniciales, el chorro de agua se encuentra con el fluido en reposo contenido en el volumen de control, y por tanto su avance en la dirección axial se ve impedido produciéndose el enrollamiento del vórtice de cabeza. Durante los primeros instantes se produce un mayor enrollamiento que da lugar al aumento del tamaño del vórtice de cabeza. Posteriormente, el aumento en la posición radial del vórtice es más lento debido a que se reduce el enrollamiento del frente como consecuencia de que se

estabiliza el avance del chorro, como se puede observar en las gráficas de posición y velocidad del frente del chorro, 4.2.1 y 4.2.2.

4.3.2 Casos de flotabilidad negativa.

Como se puede observar en la figura 4.3.1, la posición axial del vórtice en ambos casos de mezcla aumenta exponencialmente con el tiempo. Para el caso $Fr = 5$, el avance del vórtice en la dirección axial es mayor que en el caso $Fr = 10$, debido a que el chorro de agua es más pesado en relación con el volumen de control, y por tanto, el efecto de la gravedad sobre el chorro de agua en el caso $Fr = 5$ es mayor.

Debe tenerse en cuenta que para el caso $Fr = 5$, entorno al tiempo adimensional $t^* = 20$, las gráficas de posición del vórtice registran una variación elevada en un corto instante de tiempo. Dicho cambio es debido a la forma de calcular la posición del vórtice de cabeza, que como se ha explicado en *apartado 3.2.3*, se realiza en función de la presión mínima en el volumen de control. Lo que sucede es que, entorno al tiempo adimensional $t^* = 20$, se forma un torbellino con una presión mínima inferior a la del vórtice de cabeza y por tanto, se toma erróneamente como torbellino de cabeza.

Observando la figura 4.3.2, procederemos a analizar la evolución de la posición radial del vórtice en los casos de mezcla. Ambos casos siguen una evolución similar, siendo creciente la posición radial del vórtice. No obstante, llega un momento en que la posición radial del vórtice en ambos casos de mezcla disminuye y aumenta al avanzar en el tiempo. Estas variaciones de la posición radial están relacionadas con lo visto anteriormente en el *apartado 4.2.3*, a lo largo del avance del chorro en el volumen de control, se produce una absorción de algunos torbellinos secundarios por parte del vórtice de cabeza provocando un movimiento en el mismo que genera las oscilaciones en su posición radial.

4.3.3 Estudio conjunto del caso homogéneo y los casos de flotabilidad negativa.

Finalmente, analizaremos de forma conjunta los tres casos de estudio. Como puede observarse en la figura 4.3.1, la penetración del vórtice de cabeza es mayor a medida que disminuye el número de Froude, o lo que es lo mismo, a medida que los efectos de la gravedad son mayores. La evolución temporal de la penetración del vórtice de cabeza es exponencial en los casos de mezcla, mientras que en el caso homogéneo es lineal.

Al igual que en el estudio de la evolución temporal del frente del chorro, en los instantes iniciales la acción de la gravedad no es apreciable en los casos de mezcla y por tanto, la penetración del vórtice en los tres casos sigue una evolución similar.

Analizando la figura 4.3.2, se observa cómo la evolución de la posición radial del vórtice prácticamente no se ve afectada directamente por el número de Froude. Sin embargo,

indirectamente el número de Froude sí que afecta a la evolución de la componente radial del vórtice, al provocar que se produzca antes la absorción de torbellinos secundarios en el caso en que el número de Froude es menor, $Fr = 5$. Esto puede observarse en la gráfica 4.3.2, cuando en un tiempo adimensional, $t^* = 11$, la curva que se corresponde con el caso $Fr = 5$, comienza a tener un comportamiento distinto a las demás curvas, como resultado de la absorción del torbellino secundario.

4.4 Vorticidad en el torbellino de cabeza.

Tras haber analizado la evolución temporal de la posición del torbellino de cabeza, hemos comprobado cómo a medida que se inyecta el chorro de agua, el torbellino de cabeza penetra cada vez más en el interior del volumen de control, y se va alejando progresivamente del eje del chorro.

Debido a la importancia del torbellino de cabeza, en este apartado se va a estudiar la evolución de uno de sus parámetros fundamentales como es la vorticidad. Como se ha analizado anteriormente en el *apartado 3.2.4*, la vorticidad mide la rotación local en la zona de estudio considerada del fluido, que en este caso es el centro del torbellino de cabeza.

A continuación mostraremos en las distintas gráficas la evolución de la vorticidad en el centro del torbellino de cabeza. Se analizará en primer lugar el caso homogéneo de agua en agua, posteriormente los casos de mezcla, y por último se realizará una comparación de ambos casos, explicando las similitudes y diferencias.

4.4.1 Caso homogéneo.

Como se puede observar en la gráfica 4.4.1, la vorticidad en el centro del torbellino de cabeza desciende exponencialmente a medida que avanzamos en el tiempo.

En los instantes iniciales no se han tomado valores de vorticidad debido a que el vórtice de cabeza no está completamente definido, no pudiéndose precisar la localización de su centro, y viéndose afectado por la presencia de la pared de entrada. Una vez que el vórtice queda definido, se puede localizar su centro y por tanto se comienzan a obtener datos de la vorticidad.

Como puede observarse en la gráfica 4.4.1, desde los instantes iniciales la vorticidad en el torbellino de cabeza es elevada, esto se debe a que el chorro de agua inyectado a una velocidad U_j , se encuentra con el fluido en reposo del interior del volumen de control. Debido a la presencia física, viscosidad y estado de reposo del fluido contenido en el volumen de control, el chorro de agua inyectado en dirección axial comienza a enrollarse, modificando la dirección de avance de la zona de cabeza, generando vorticidad.

Como se indica en el *apartado* de teoría 3.2.4, el valor inicial de la vorticidad que se registra en la gráfica 4.4.1, depende del valor del número de Reynolds del chorro de agua inyectado, por lo que a mayor número de Reynolds, mayor vorticidad generada y menor difusión de la misma hacia el volumen de control. La vorticidad disminuye con el tiempo debido a que se difunde hacia el campo fluido, en un principio se difunde a mayor velocidad, observándose una mayor pendiente decreciente en la curva, debido a que elevados gradientes de velocidad causan altas fuerzas viscosas.

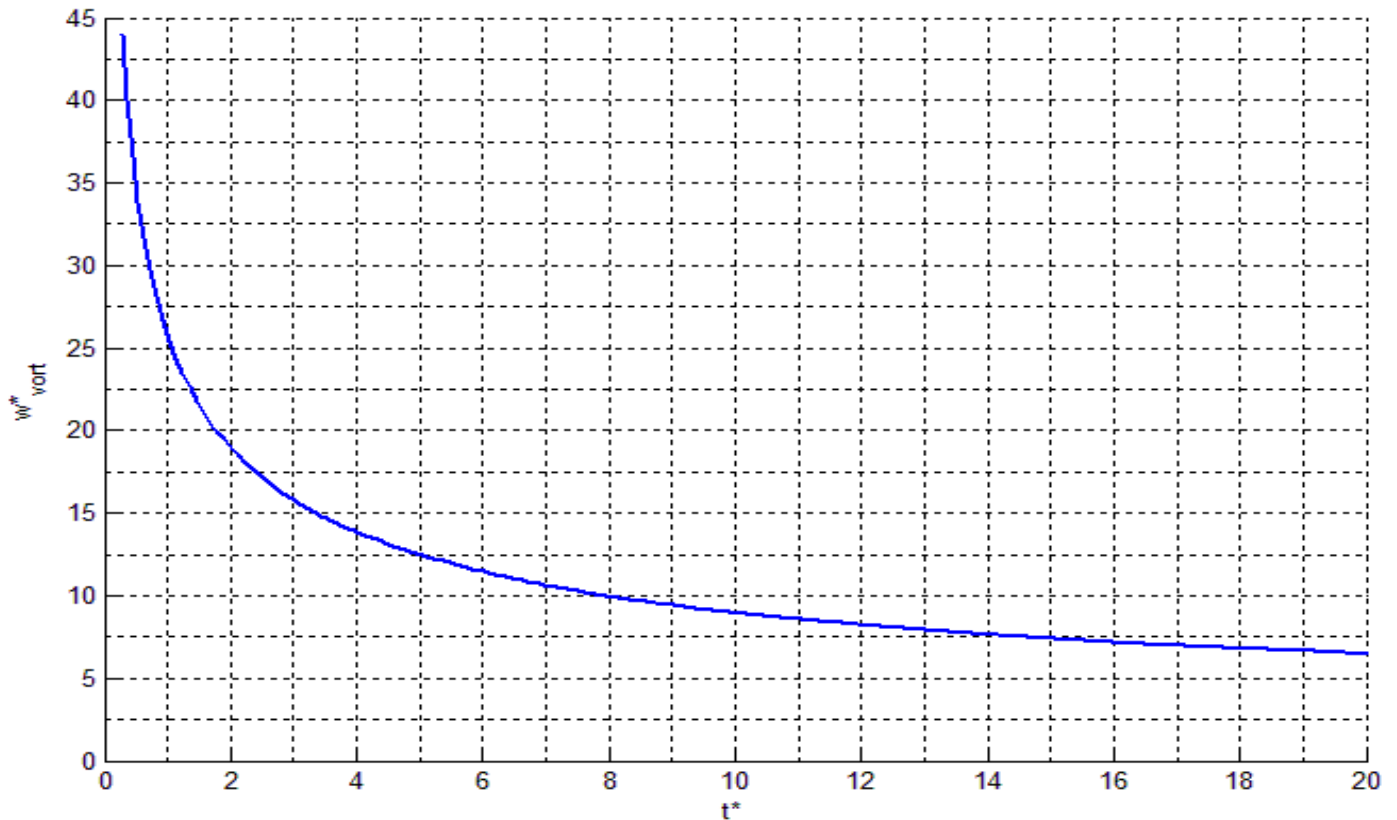


Figura 4.4.1. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza en la descarga de agua en agua.

A medida que el vórtice evoluciona en el tiempo, la vorticidad adimensional del torbellino de cabeza en el caso homogéneo tiende asintóticamente a un valor igual a 5. Este hecho explica que una vez se produzca la separación del torbellino de cabeza de la estela de vorticidad aguas arriba del mismo (también conocido como “*pinch off*”), el torbellino no pierda su vorticidad, sino que la mantenga en su valor mínimo.

4.4.2 Casos de flotabilidad negativa.

Como se observa en la gráfica 4.4.2, la vorticidad del torbellino principal en los casos de mezcla decrece exponencialmente a medida que avanzamos en el tiempo. Los valores de la vorticidad adimensional para los casos $Fr = 5$ y $Fr = 10$ son muy próximos entre sí desde el instante en que se forma el vórtice hasta que se comienza a producir la absorción de vórtices secundarios por parte del torbellino principal. Desde este momento se observan oscilaciones en ambas curvas debido al efecto del vórtice secundario sobre el torbellino principal.

En ambos casos, $Fr = 5$ y $Fr = 10$, utilizando los resultados obtenidos previamente se puede realizar un seguimiento de la absorción del vórtice secundario. En la gráfica 4.2.4, se observa cómo para unos tiempos adimensionales $t^* \sim 12,5$ ($Fr = 5$) y $t^* \sim 15$ ($Fr = 10$) el vórtice secundario llega al frente del chorro, observándose sus efectos en el aumento de la velocidad

del frente. Posteriormente, en la gráfica 4.3.2, para unos tiempos adimensionales $t^* \sim 15,5$ ($Fr = 5$) y $t^* \sim 18$ ($Fr = 10$) se observa cómo el vórtice secundario es absorbido por el torbellino principal, provocando la separación del torbellino principal respecto del eje del chorro. En esos mismo tiempos, en la gráfica 4.4.2, se observa el aumento de la vorticidad provocado por la absorción del vórtice secundario.

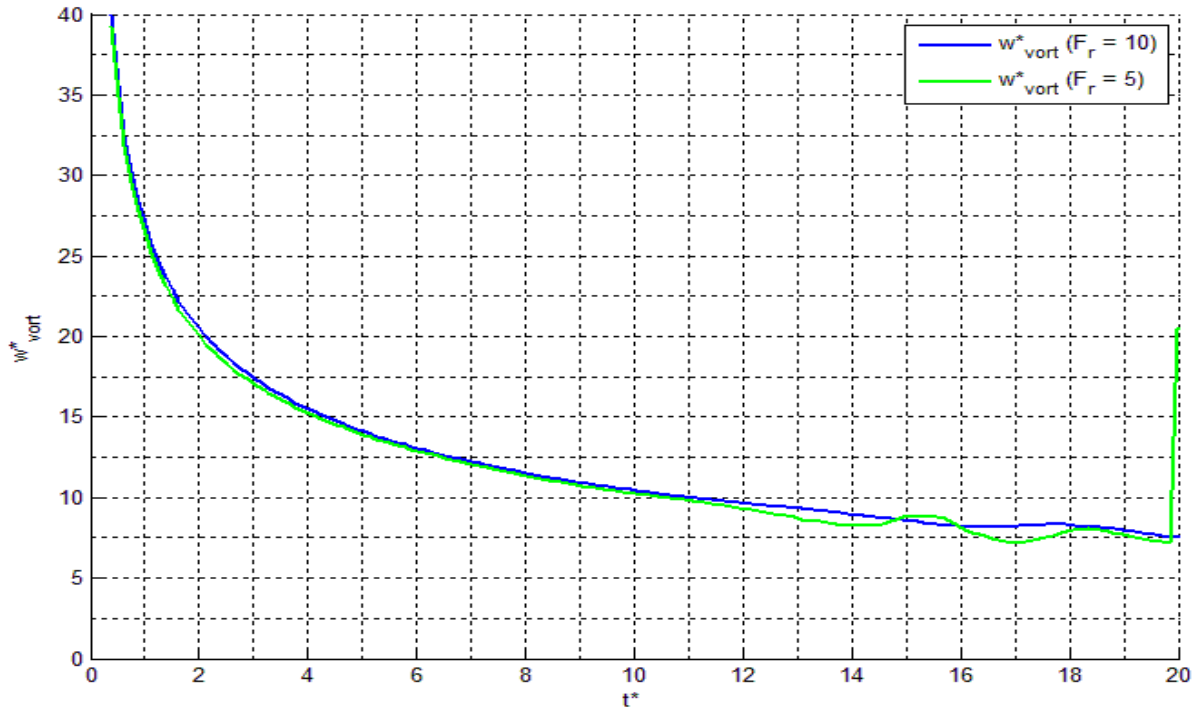


Figura 4.4.2. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza en los casos de mezcla.

Finalmente, se observa cómo ambas curvas tienden asintóticamente hacia un valor de vorticidad adimensional igual a 5, que como se explicó anteriormente para el caso homogéneo, se corresponde con la vorticidad que tendrá en vórtice principal una vez se produzca la separación respecto de la estela de vorticidad, o “*pinch off*”.

La elevada vorticidad que se registra para el caso $Fr = 5$ entorno a $t^* = 20$, se debe a que se ha formado un nuevo vórtice en la cabeza del chorro, de menor presión estática en su centro y por lo tanto, se está registrando la vorticidad en este vórtice en lugar del vórtice del torbellino de cabeza.

4.4.3 Estudio conjunto del caso homogéneo y los casos de flotabilidad negativa.

La evolución temporal de la vorticidad en el centro del torbellino principal es decreciente exponencialmente en los tres casos de estudio. En los instantes iniciales, la vorticidad en los tres casos de estudio alcanza valores muy parecidos debido a que no se aprecian los efectos de la gravedad.

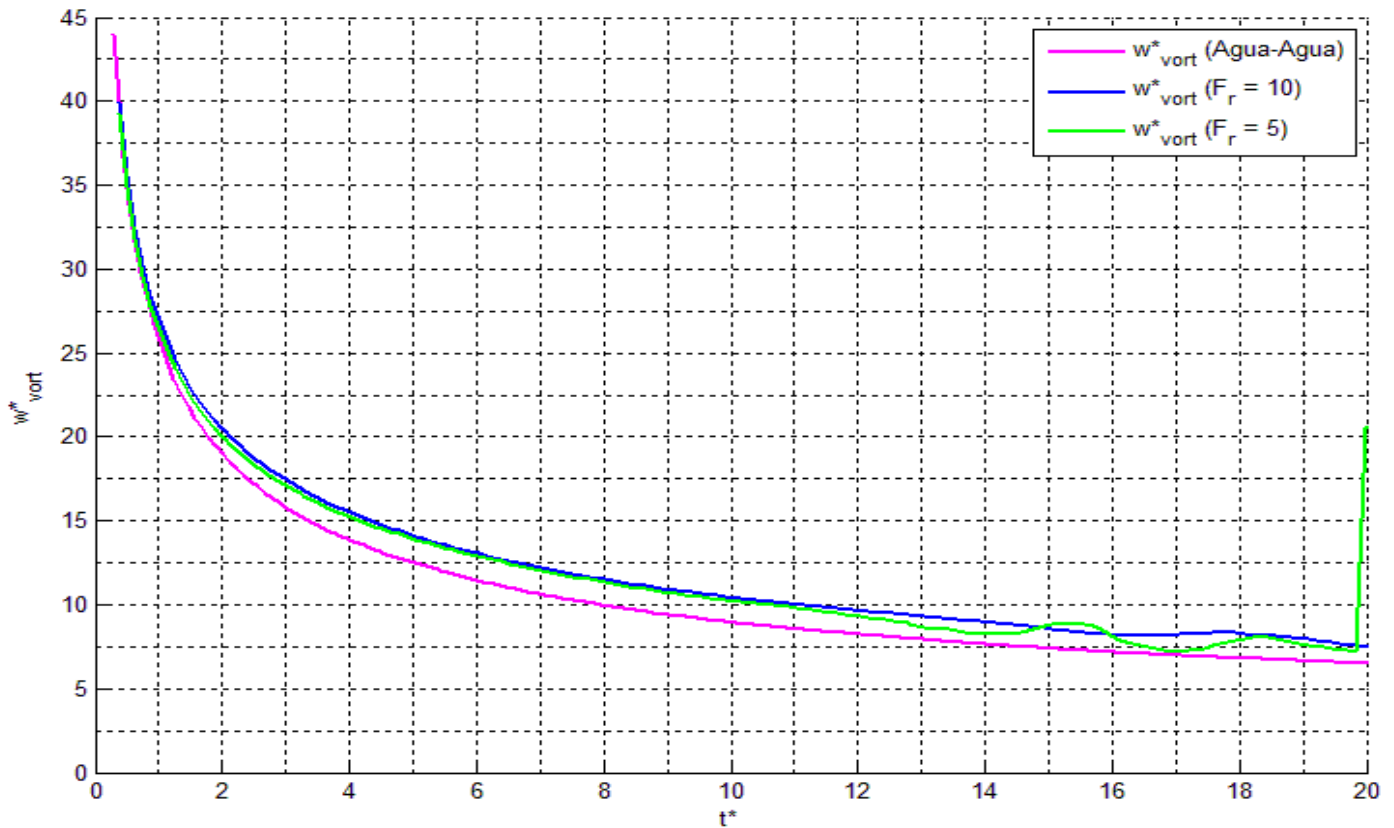


Figura 4.4.3. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio.

Los tres casos de estudio han sido llevados a cabo de forma que el chorro de agua inyectado en el volumen de control tenga un número de Reynolds igual a 2000, lo cual implica una misma velocidad de inyección y como puede observarse en la gráfica en los instantes iniciales, una misma vorticidad generada en el vórtice principal.

Sin embargo, a partir de cierto instante, la vorticidad adimensional del caso homogéneo disminuye más en comparación con los casos de mezcla, lo cual implica que la difusión de la vorticidad es mayor. Como se observa en la gráfica, en el vórtice principal de los chorros de mezcla se difunde menos la vorticidad que en el caso homogéneo. Como se ha explicado en el apartado 3.2.4, uno de los efectos de la gravedad sobre el chorro de agua, está relacionado con la formación de vorticidad baroclínica, producida por la diferencia de densidades existente en los casos de mezcla entre el chorro de agua y el volumen de control. Dicha contribución a la generación de vorticidad baroclínica, junto con otros factores como la

distinta deformación del vórtice, contribuyen a la diferencia de vorticidad en el centro del torbellino entre los casos de mezcla y el caso homogéneo.

Finalmente, los tres casos tienden a un valor similar de vorticidad adimensional igual a 5, que será igual a la vorticidad adimensional del vórtice una vez se produzca el “*pinch off*”.

Hasta este momento se ha analizado la evolución temporal de la vorticidad adimensional en el centro del vórtice principal, no obstante, es de especial interés conocer la distribución espacial de la vorticidad en ese mismo punto.

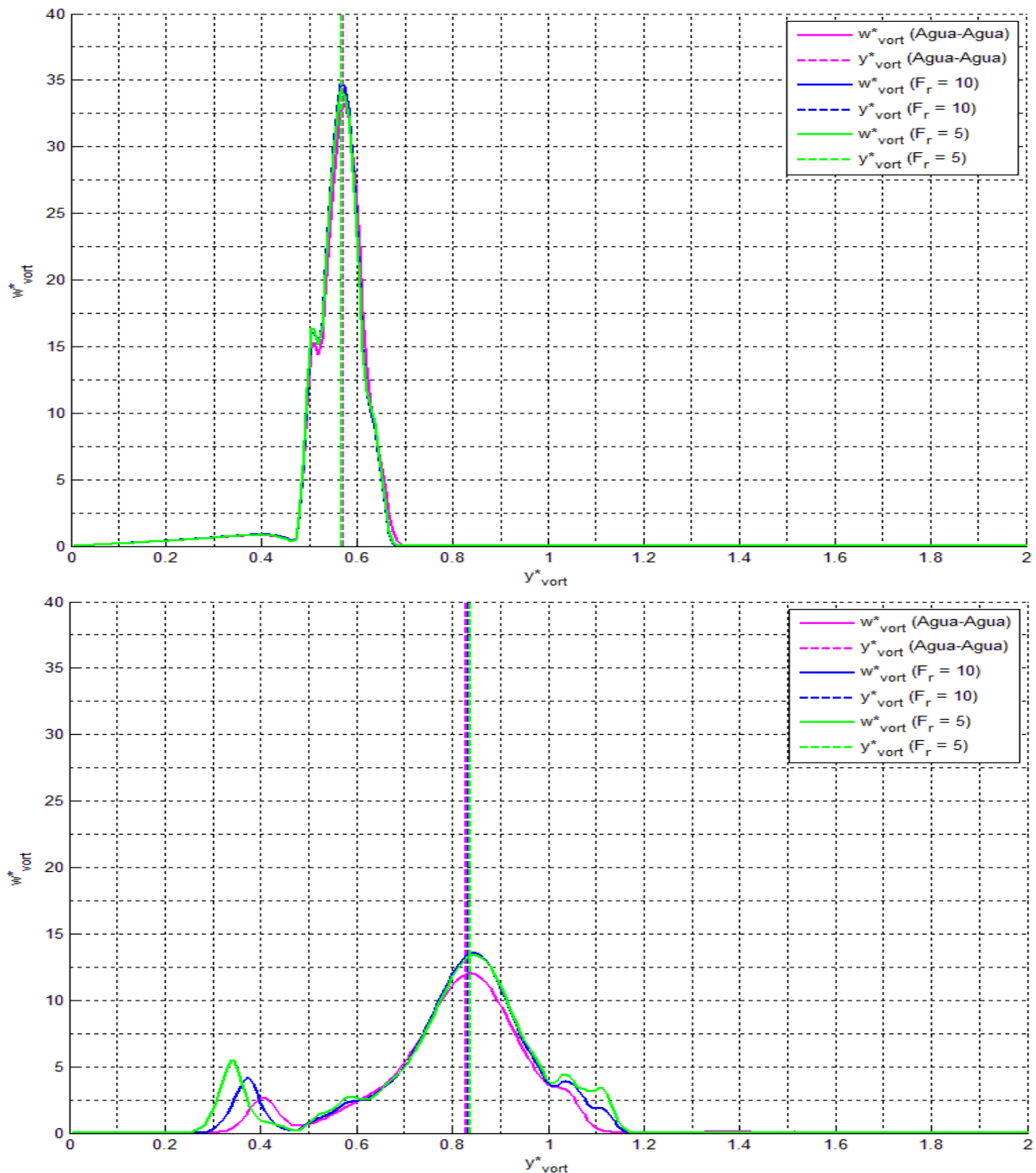


Figura 4.4.4. Distribución radial de la vorticidad adimensional en el centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio para $t^* \sim 0.5$ (Superior) y $t^* \sim 5.5$ (Inferior) .

A continuación, se representa en las gráficas 4.4.4 y 4.4.5, la distribución de la vorticidad a lo largo de una línea que pasa por el centro del vórtice del torbellino principal recorrida en la dirección radial, y^* , en los mismos cinco instantes de tiempo que en el *apartado 4.1*.

Las gráficas 4.4.4 y 4.4.5, representan en el eje de abscisas la variación adimensional de la posición radial a lo largo de una línea perpendicular al eje del chorro que pasa por el centro del vórtice principal, correspondiéndose el origen, $y^* = 0$, con el eje del chorro. En el eje de ordenadas se representa el valor de la vorticidad adimensional de cada punto de la línea.

En las gráficas anteriores se ha incluido una línea discontinua para cada caso de estudio que indica la posición del centro del torbellino. Como se observa en las gráficas y se ha explicado anteriormente en los *apartados 3.2.3 y 3.2.4*, el centro del vórtice es un punto donde se registra un mínimo local en la presión estática y no necesariamente se corresponde con el punto de máxima vorticidad, que como se puede apreciar, se localiza más próximo al eje del chorro. En los instantes iniciales sí coincide el punto de máxima vorticidad con el centro del vórtice, pero a medida que avanzamos en el tiempo se observa la diferencia entre ambos puntos.

La distribución espacial de la vorticidad tiene la forma de una función Gaussiana, que a medida que transcurre el tiempo va aumentando el grosor de su campana como consecuencia de la difusión de la vorticidad. En las gráficas 4.4.4 y 4.4.5, también se observa cómo la distribución espacial de la vorticidad adimensional coincide en los primeros instantes para todos los casos de estudio, y a medida que transcurre el tiempo comienzan a observarse las diferencias debidas a la absorción de torbellinos secundarios, la vorticidad baroclínica y la gravedad, comentadas anteriormente.

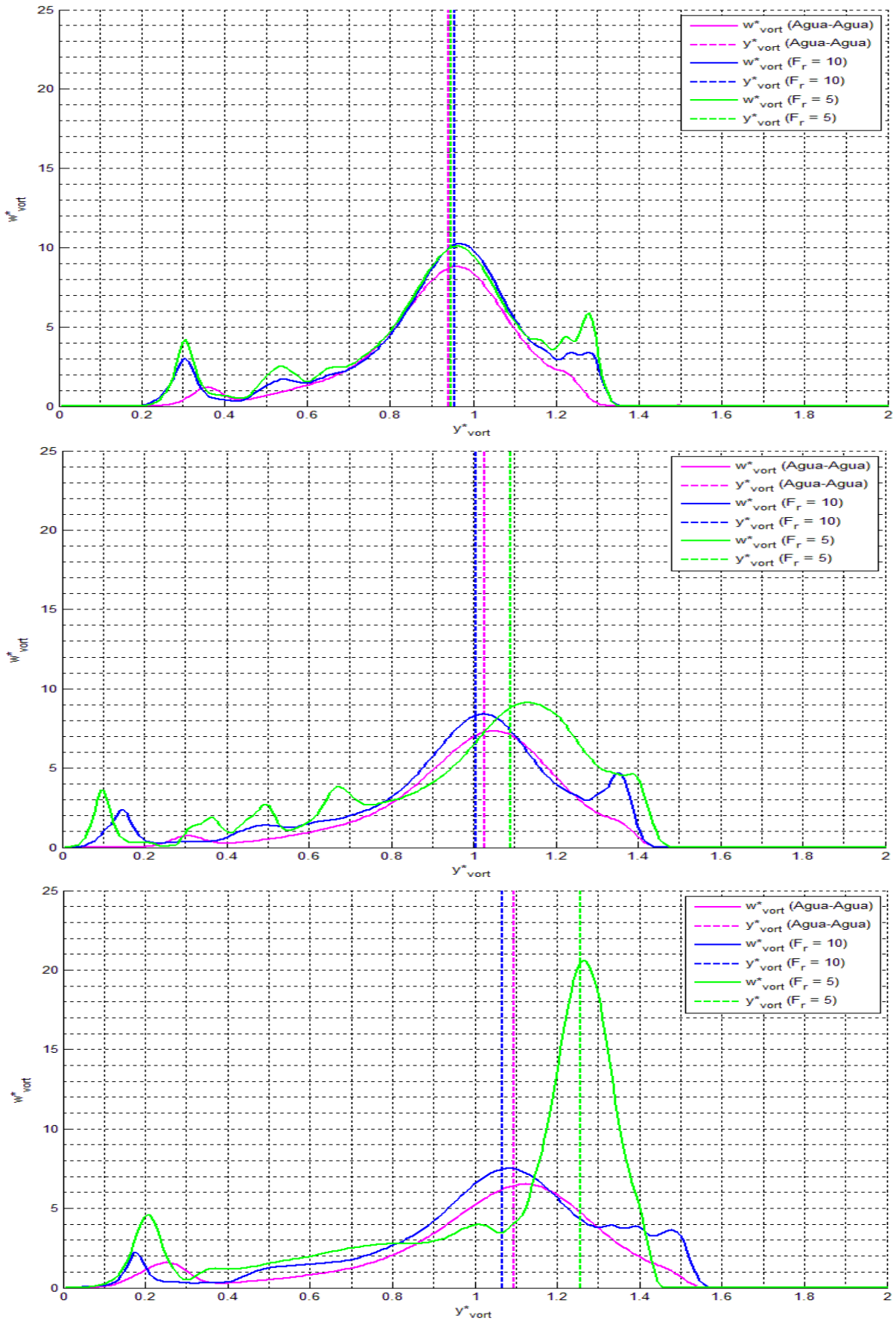


Figura 4.4.5. Distribución radial de la vorticidad adimensional en el centro del vórtice de cabeza en todos los casos de estudio para $t^* \sim 10.5$ (Superior), $t^* \sim 15.5$ (Medio) y $t^* \sim 20$ (Inferior).

En la gráfica 4.4.5 (Inferior), para el caso $Fr = 5$, se observa claramente el salto de vorticidad debido a que el punto de mínima presión pasa a ser un nuevo vórtice generado en el entorno de la cabeza del chorro. El nuevo vórtice generado (recuadrado en color rojo), el vórtice principal (recuadrado en color verde), los torbellinos secundarios y la estela de vorticidad aguas arriba del torbellino de cabeza pueden observarse en la gráfica 4.4.6, o en el *Anexo C* donde se encuentran las gráficas de vorticidad adimensional de los demás casos.

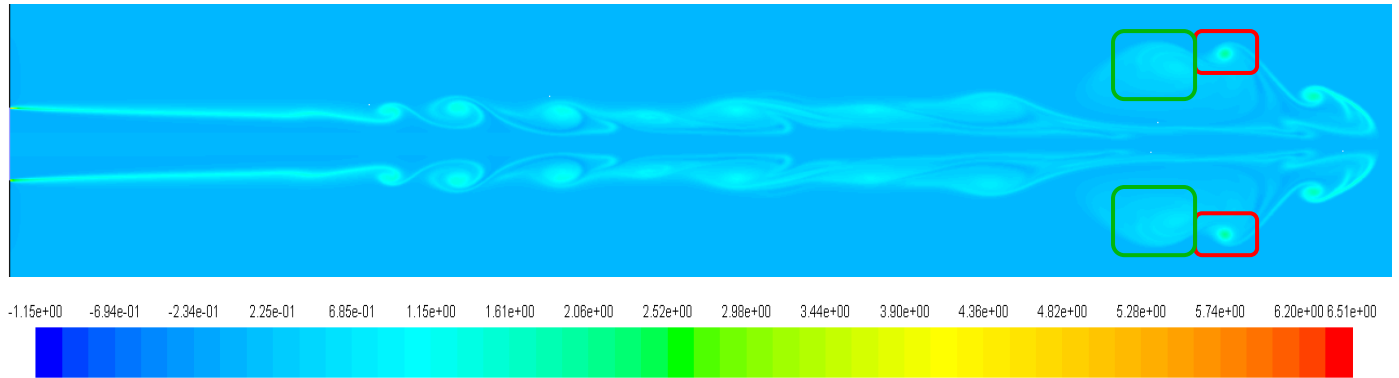


Figura 4.4.6. Distribución espacial de la vorticidad adimensional en el caso de mezcla $Fr = 5$ para $t^* \sim 20$.

4.5 Circulación.

Tras haber realizado un análisis de alcance puntual en el centro del vórtice principal, analizando su evolución y midiendo varias de sus propiedades, entre ellas la vorticidad, en este apartado cambiamos el tipo de análisis. El parámetro que estudiaremos a continuación es la evolución de la circulación, por lo que nos estamos refiriendo a una propiedad del flujo cuyo valor está vinculado a la superficie del mismo que consideremos, como hemos visto en el *apartado 3.2.5*.

En base a lo anteriormente expuesto, para cada caso de estudio se analizarán adimensionalmente la evolución temporal de la circulación en el vórtice principal de cabeza y la circulación total, refiriéndonos en este caso a la circulación resultante de considerar el total del volumen de control.

En primer lugar, de igual forma que en los apartados anteriores, se analiza el caso de estudio homogéneo formado por el chorro de agua que se introduce en un volumen de control formado por agua. Posteriormente, se analizan los casos de estudio de mezcla, $Fr = 10$ y $Fr = 5$, y finalmente se analizan de forma conjunta todos los casos de estudio llevados a cabo.

4.5.1 Caso homogéneo.

En la figura 4.5.1, se muestran los resultados obtenidos para el caso de estudio homogéneo. En dicha gráfica se muestra tanto la circulación total extendida al volumen de control, como la circulación del vórtice principal de cabeza.

En primer lugar, puede observarse cómo la circulación total en el caso homogéneo (color morado) tiene una tendencia lineal creciente. La pendiente de la recta de ajuste es, $m = 0.497$, muy próximo al valor de 0.5 calculado teóricamente en el proyecto de *Mónica Pardo* [18]. La explicación a la forma de la gráfica se fundamenta en que estamos introduciendo un chorro de agua de manera ininterrumpida a una velocidad constante. De esta forma, al calcular la circulación total referida al área formada por un plano $\theta \equiv cte$ del volumen de control, se observa cómo el área afectada por el chorro, y por tanto con vorticidad mayor que cero, es cada vez mayor provocando que la circulación aumente a un ritmo constante a medida que avanzamos en el tiempo.

En segundo lugar se estudia la circulación en el vórtice principal de cabeza para lo cual se han utilizado dos métodos diferentes de cálculo que nos han llevado a iguales resultados. Como se indica en el *apartado 3.2.5*, el principal inconveniente a la hora de calcular la circulación en el vórtice principal radica en delimitar el área que representa dicho vórtice. El “*método 1*”, también utilizado por *Gharib, Rambod y Shariff* [2] y *Ángel Vidal* [19], representado por las líneas continuas en la figura 4.5.1, muestra la evolución de la circulación en un área delimitada por los isocontornos de vorticidad igual a $\omega^* = 0.5$ (*en azul, trazo continuo*) y $\omega^* = 1$ (*en rojo, trazo continuo*). En el momento en que se observa el “*pinch-off*” o desconexión del vórtice principal respecto del chorro, observamos dos áreas,

como se muestra en la figura 4.5.2, pudiendo delimitar la correspondiente al vórtice principal.

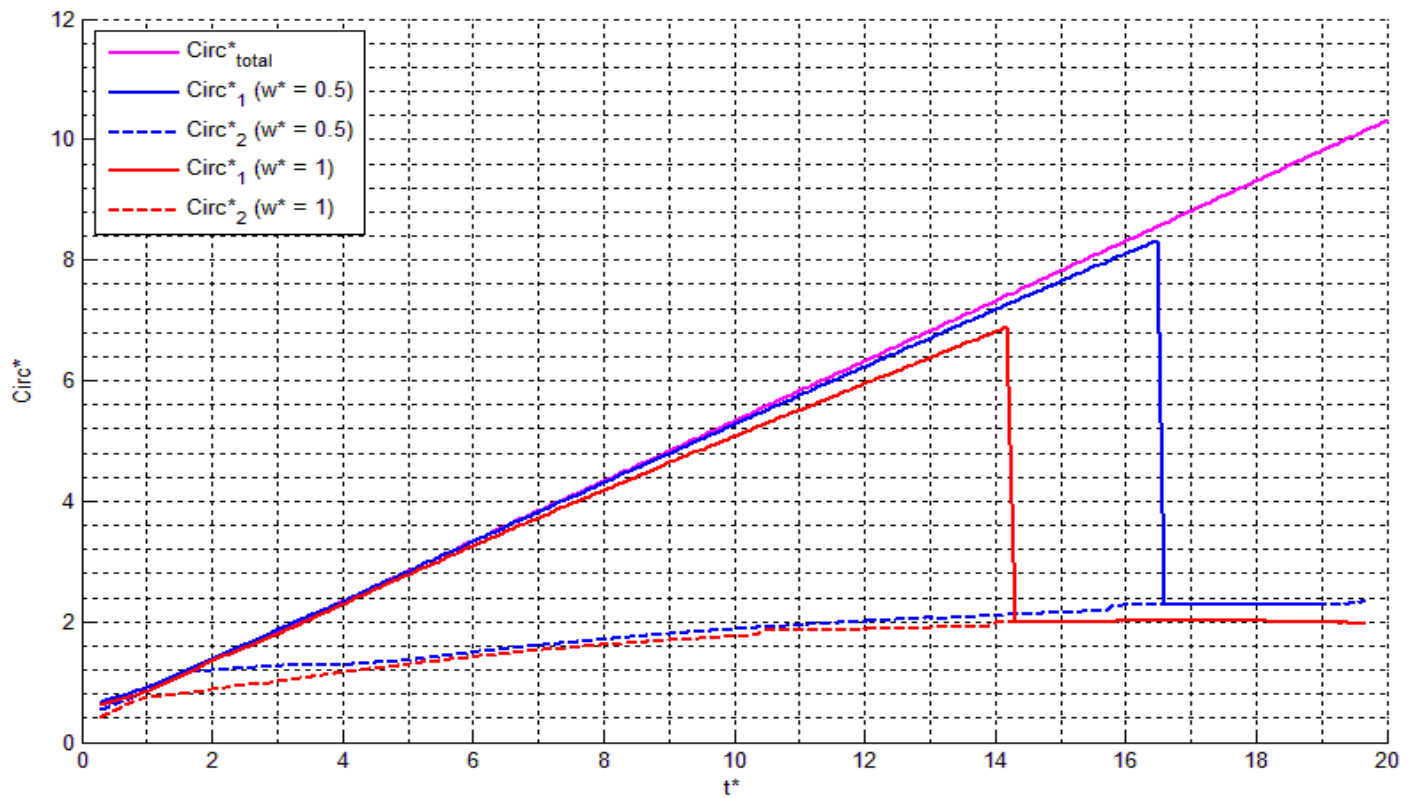


Figura 4.5.1. Evolución temporal de la circulación adimensional total y del vórtice, en la descarga de agua en agua.

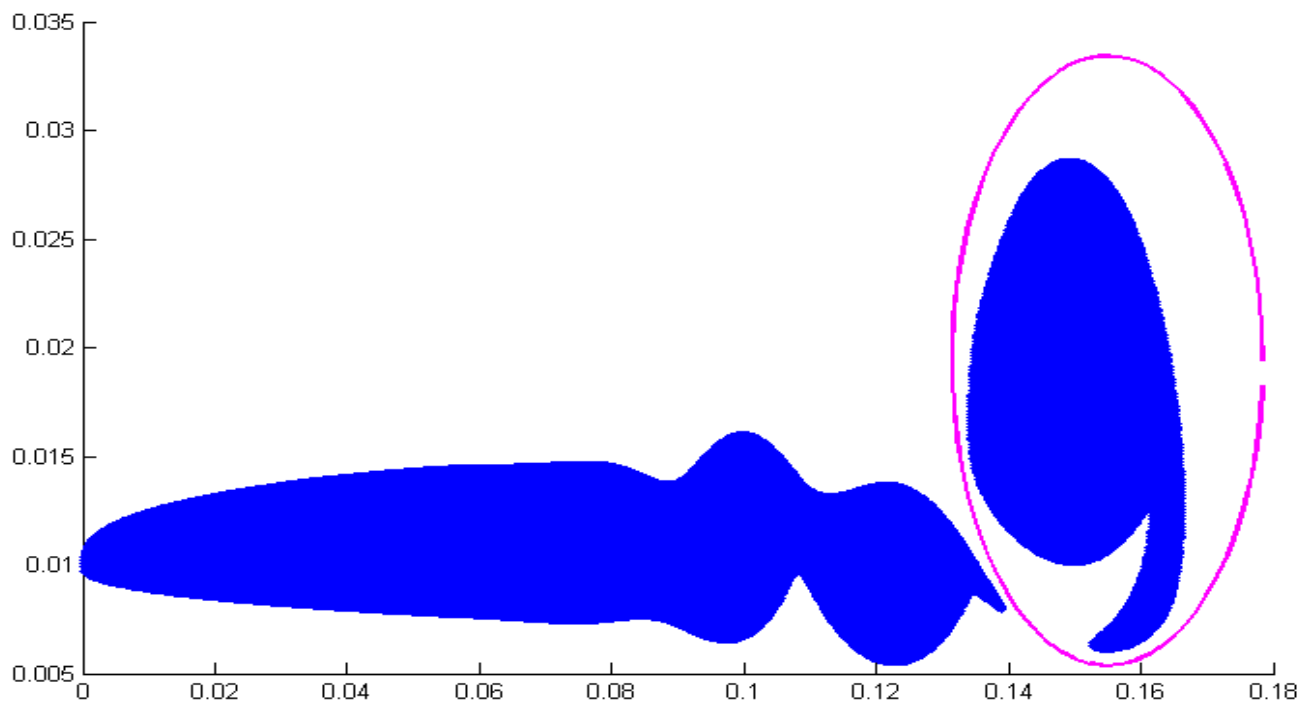


Figura 4.5.2. Isocontorno de vorticidad adimensional, $w^* = 0.5$, en un tiempo adimensional, $t^* = 18.26$, para la descarga de agua en agua.

En el “*método 1*” de cálculo, desde el momento en que se observa el “*pinch-off*” entorno a los tiempos $t^* \sim 14$ y $t^* \sim 16.5$, respectivamente para cada valor de ω^* utilizado, se calcula la circulación únicamente en el vórtice principal, observándose la disminución de su valor en la figura 4.5.1. En la misma gráfica también se observa la diferencia existente al elegir un isocontorno de vorticidad adimensional menor. El valor crítico de la vorticidad adimensional, ω^* , elegido para definir los isocontornos, tendrá un efecto directo sobre el área que define el vórtice principal y por tanto, sobre la exactitud a la hora de calcular la circulación en dicho vórtice. Como se puede comprobar en la figura 4.5.1, en los tiempos previos al “*pinch-off*”, la cantidad de circulación que no queda delimitada por cada isocontorno respecto de la circulación total es menor para $\omega^* = 0.5$ respecto de $\omega^* = 1$, por lo que estamos ajustando de manera más exacta el área del vórtice principal a medida que disminuimos el valor de la vorticidad crítica.

La utilización de un método de cálculo distinto al explicado anteriormente para la evolución temporal de la circulación, “*método 2*”, tiene su fundamento en los casos de estudio en los que no se observa el “*pinch-off*”. Dicho método se basa en el cálculo de la circulación en el vórtice principal en todo momento, utilizando isocontornos de vorticidad para delimitar el área de integración a la hora de calcular la circulación adimensional. Para mostrar al lector la validez del “*método 2*” se ha utilizado también en el caso homogéneo, obteniéndose idéntico resultado que en el “*método 1*”. En el *apartado 3.2.5*, se explican en detalle ambos métodos.

Como puede observarse en la gráfica 4.5.1, el “*método 2*” queda representado por las líneas de trazo discontinuo. Se observa cómo desde el inicio, la circulación adimensional en el vórtice principal aumenta progresivamente hasta permanecer su valor constante e igual a 2 para $\omega^* = 1$ (*en rojo, trazo discontinuo*), y de valor 2.2 para $\omega^* = 0.5$ (*en azul, trazo discontinuo*). Se observa cómo la aleatoriedad relativa a la hora de escoger el área que delimita el vórtice principal previamente a observar el “*pinch-off*”, se traduce en ocasiones en tramos irregulares en las curvas.

Por tanto, de acuerdo con la teoría y con la ecuación (3.2.31) obtenida en el *apartado 3.2.5* de teoría, una vez se produce el “*pinch-off*”, el valor de la circulación adimensional se mantiene constante en torno a un valor adimensional de 2, lo cual se debe a que la vorticidad en el área que representa el vórtice principal de cabeza deja difundirse.

Por último, debe indicarse que el número de formación, definido en el *apartado 3.2.5* de teoría:

$$\text{Número formación } (\omega^* = 1) \rightarrow t^* = 3.5 \quad (4.5.1)$$

$$\text{Número formación } (\omega^* = 0.5) \rightarrow t^* = 4 \quad (4.5.2)$$

Dichos valores del número de formación, como vimos en el *apartado 3.2.5*, quedan dentro del rango de valores estudiados y obtenidos por *Gharib, Rambod y Shariff* en su trabajo [2]: número de formación $\sim [3.6 - 4.5]$.

4.5.2 Casos de flotabilidad negativa.

En este apartado abarcamos el estudio de la evolución temporal de la circulación adimensional en los casos de mezcla. En la figura 4.5.3, se han incluido para ambos casos de mezcla, la evolución temporal tanto de la circulación total (líneas de trazo continuo) como de la circulación del vórtice (líneas de trazo discontinuo).

Como se puede observar en la gráfica 4.5.3, la evolución de la circulación total en los casos de mezcla es siempre creciente y a un ritmo exponencial. Dicho comportamiento se explica debido al efecto de la gravedad, que como comprobamos en apartados anteriores repercute en una mayor penetración del chorro, generando vorticidad en un área cada vez mayor a medida que avanzamos en el tiempo. Al mismo tiempo, la generación de vorticidad baroclínica debido a la existencia de gradientes de densidades, juega un papel importante como veremos a continuación.

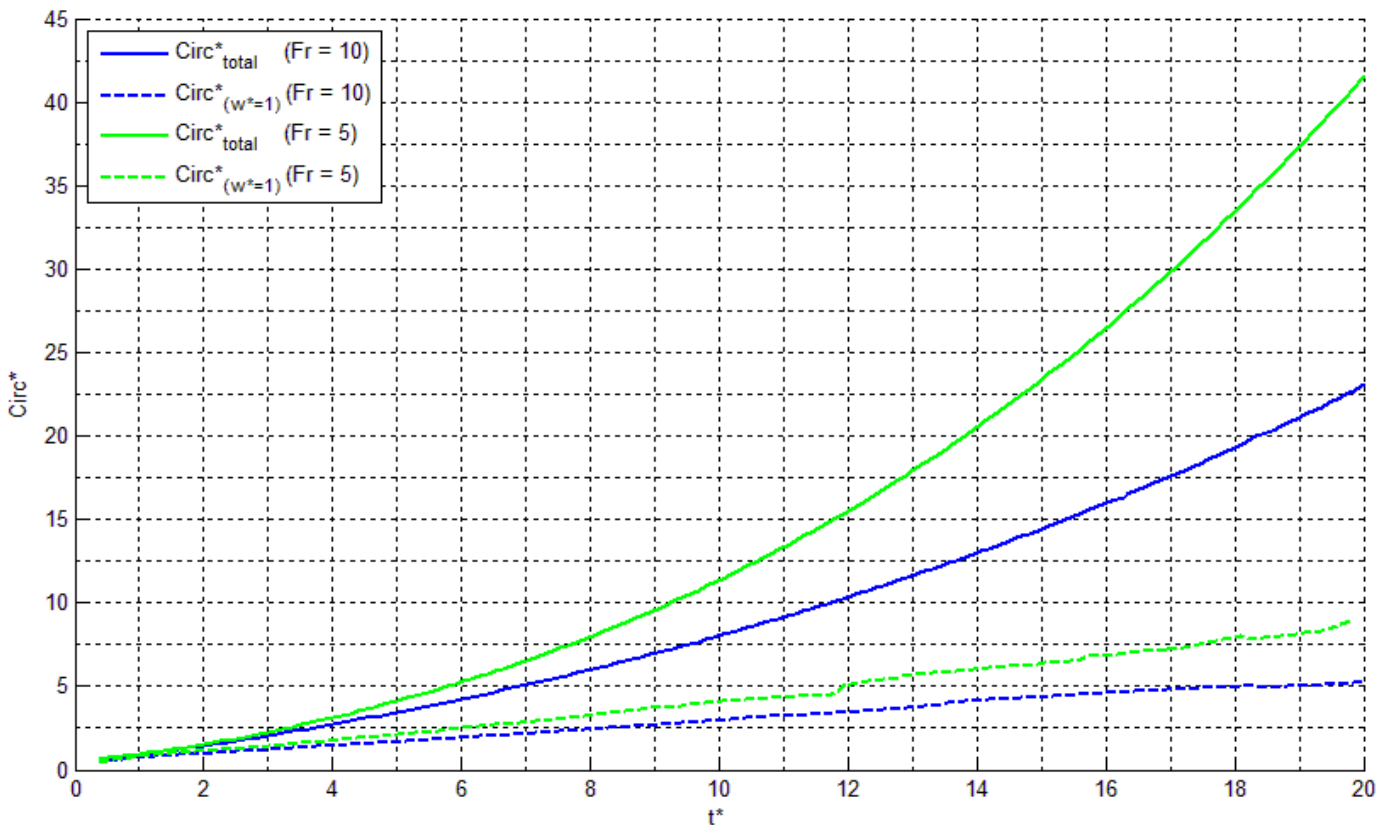


Figura 4.5.3. Evolución temporal de la circulación adimensional total y del vórtice en los casos de mezcla.

La curva de circulación total adimensional del caso de mezcla $Fr = 5$ (en color verde), adquiere unos valores mayores para un mismo instante de tiempo que la curva de circulación total adimensional del caso $Fr = 10$. Tales diferencias se acentúan a medida que aumenta el tiempo, debido a que también aumenta el periodo de actuación de las fuerzas de flotabilidad y la aportación de la vorticidad baroclínica.

A la hora de calcular la circulación adimensional referente al vórtice principal de cabeza para los casos de mezcla, ha sido necesario utilizar el método de cálculo definido en el apartado anterior como “*método 2*”. La utilización de dicho método radica en la imposibilidad de observar el “*pinch-off*” debido tanto al insuficiente rango de tiempos de nuestros casos de estudio, como al valor de vorticidad crítica utilizado para obtener los isocontornos. La generación y posterior absorción de vórtices secundarios por parte del vórtice principal de cabeza también influye en que en los casos de mezcla no observemos el “*pinch-off*”.

En los casos de mezcla, el valor de vorticidad crítica utilizado para obtener los isocontornos y poder delimitar el área del vórtice principal de cabeza, se ha escogido $\omega^* = 1$. El motivo es únicamente funcional, debido a que a medida que disminuimos el valor de ω^* , abarcamos una mayor región de fluido, dificultando la diferenciación respecto del chorro del área del vórtice principal.

En la gráfica 4.5.3, se observa para ambos casos de mezcla, cómo tras utilizar el “*método 2*” para calcular la circulación adimensional en el vórtice principal de cabeza, el valor de la misma es siempre creciente incrementándose de forma lineal. Este aumento en forma lineal del valor de la circulación adimensional, tiene su explicación en la generación de vorticidad baroclínica producida en el vórtice principal de cabeza al ser uno de los puntos donde se observa un mayor mezclado (como puede comprobarse en las gráficas 4.1.2 y 4.1.3) y por tanto, donde también se registran gradientes de densidades.

A continuación mostraremos las rectas de ajuste para la evolución temporal de la circulación adimensional en el vórtice principal de cabeza:

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 10: \quad Circ^* = 0.251 \cdot t^* + 0.469 \quad (4.5.1)$$

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 5: \quad Circ^* = 0.421 \cdot t^* + 0.075 \quad (4.5.2)$$

Como se observa en la gráfica 4.5.3 y en las ecuaciones (4.5.1) y (4.5.2), en el caso de mezcla $Fr = 5$, la circulación adimensional aumenta en torno a un 35 % más rápido con respecto al caso $Fr = 10$ para los rangos de tiempo estudiados.

Por último, vamos a comparar los resultados obtenidos experimentalmente con las ecuaciones teóricas. Para ello, adimensionalizamos la ecuación (3.2.30) incluida en el apartado 3.2.5:

$$\frac{D\Gamma^*}{Dt^*} = \iint_S \frac{\nabla \rho^* \times \nabla P^*}{(\rho^*)^2} dS^* + \frac{1}{Re} \iint_S (\nabla^2 \omega^*) \cdot dS^* \quad (4.5.3)$$

Como podemos observar en la ecuación (4.5.3), el segundo término relacionado con la difusión de vorticidad es despreciable debido al alto número de Reynolds del problema, $Re = 2000$. Por tanto, para el vórtice principal de cabeza, se puede aproximar el aporte a la circulación adimensional debido a la generación de vorticidad baroclínica:

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 10: \quad \iint_S \frac{\nabla \rho^* \times \nabla P^*}{(\rho^*)^2} dS^* = 0.251 \quad (4.5.4)$$

$$\text{Caso de mezcla } Fr = 5: \quad \iint_S \frac{\nabla \rho^* \times \nabla P^*}{(\rho^*)^2} dS^* = 0.421 \quad (4.5.5)$$

4.5.3 Estudio conjunto del caso homogéneo y los casos de flotabilidad negativa.

En este último apartado agrupamos en la figura 4.5.4, las gráficas de evolución temporal de la circulación adimensional obtenidas en los tres casos de estudio. Como se observa en la gráfica 4.5.4, para un mismo instante de tiempo, tanto la circulación total como la circulación del vórtice principal de cabeza, alcanzan unos valores mayores en los casos de mezcla.

El efecto conjunto de la gravedad y la generación de vorticidad baroclínica tienen un claro efecto sobre el crecimiento de las curvas de circulación adimensional. Mientras que en el caso homogéneo el crecimiento de la circulación adimensional en cada instante de tiempo es constante, en los casos de mezcla es exponencial.

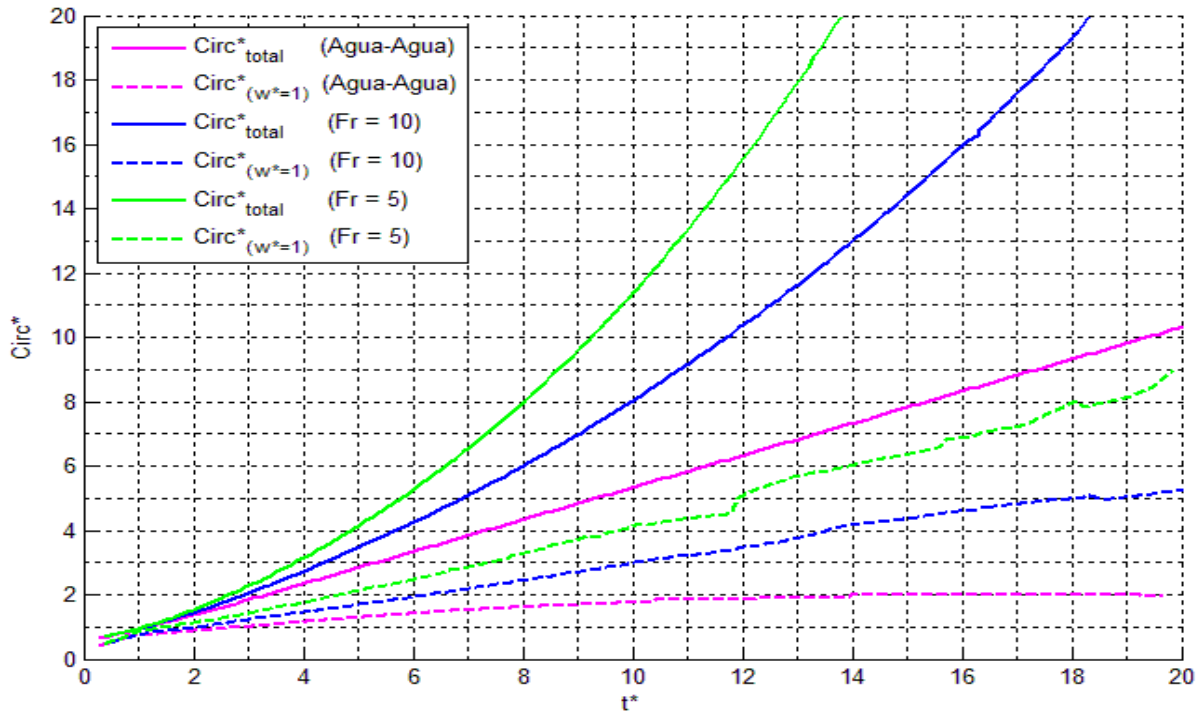


Figura 4.5.4. Evolución temporal de la circulación adimensional total y del vórtice en todos los casos de estudio.

En cuanto a la circulación del vórtice principal de cabeza, el efecto conjunto de las fuerzas de flotabilidad y la generación de vorticidad baroclínica, provocan la diferencia y aumento de la circulación en los casos de mezcla. El valor de la circulación adimensional en el vórtice principal de los casos de mezcla es mayor con respecto al caso homogéneo. La diferencia es tal que si para un mismo instante de tiempo comparamos la circulación en el vórtice principal

de los casos de mezcla con respecto a la circulación total del caso homogéneo, obtenemos que la circulación adimensional en el vórtice principal de los casos de mezcla, $Fr = 5$ y $Fr = 10$, es respectivamente, en torno a un 17% y un 47 % inferior a la circulación total adimensional en el caso homogéneo.

4.6 Energía cinética.

Como se explicó anteriormente en el *apartado 3.2.6* de teoría, el caso de estudio es un problema transitorio, por lo que en cada instante de tiempo las variables del problema evolucionan y modifican sus valores.

En cada instante de tiempo el campo de velocidades en el volumen de control será distinto, y por tanto también lo serán la vorticidad y la energía cinética en el mismo. Estas tres variables están relacionadas según las fórmulas (3.2.34) y (3.2.35). Como se puede deducir de ambas fórmulas, la evolución de la energía cinética en el volumen de control está directamente relacionada con el campo de velocidad y vorticidad en el mismo.

A continuación se estudiará esta relación para los dos casos de estudio: en primer lugar para el caso del chorro de agua que se introduce en un ambiente compuesto únicamente por agua, y en segundo lugar cuando el chorro de agua se introduce en un ambiente compuesto por la mezcla de agua y alcohol en las condiciones vistas en el *Capítulo 2*.

En los análisis que se llevarán a cabo a continuación se hace referencia a la energía cinética en el caso teórico sin viscosidad. La evolución de la energía cinética con respecto al tiempo en ausencia de viscosidad, con y sin el efecto de la gravedad, fue calculado anteriormente en el *apartado 3.2.6*.

4.6.1 Caso homogéneo.

Como se puede observar en la figura 4.6.1, para el rango de tiempos mostrado, la energía cinética en el volumen de control aumenta de forma lineal a medida que avanzamos en el tiempo.

A continuación se muestra la recta de ajuste, para los datos de energía cinética obtenidos en el caso homogéneo:

$$E_k^*(real) = 0,41 \cdot t^* + 0,21 \quad (4.6.1)$$

La evolución de la energía cinética con respecto al tiempo es lineal, hecho que se explica debido a que estamos introduciendo un chorro de agua a una velocidad constante dentro de un ambiente de la misma densidad. Por tanto, independientemente de cómo se distribuya el campo de velocidades en el volumen de control, la cantidad de energía cinética que se transmite en la entrada a las partículas del interior del volumen de control es constante en el tiempo. Este hecho implica que la cantidad de energía cinética que se transmite al volumen de control en un intervalo de tiempo, Δt^* , sea constante e igual a $\Delta E_k^* = 0,41 \cdot \Delta t^*$.

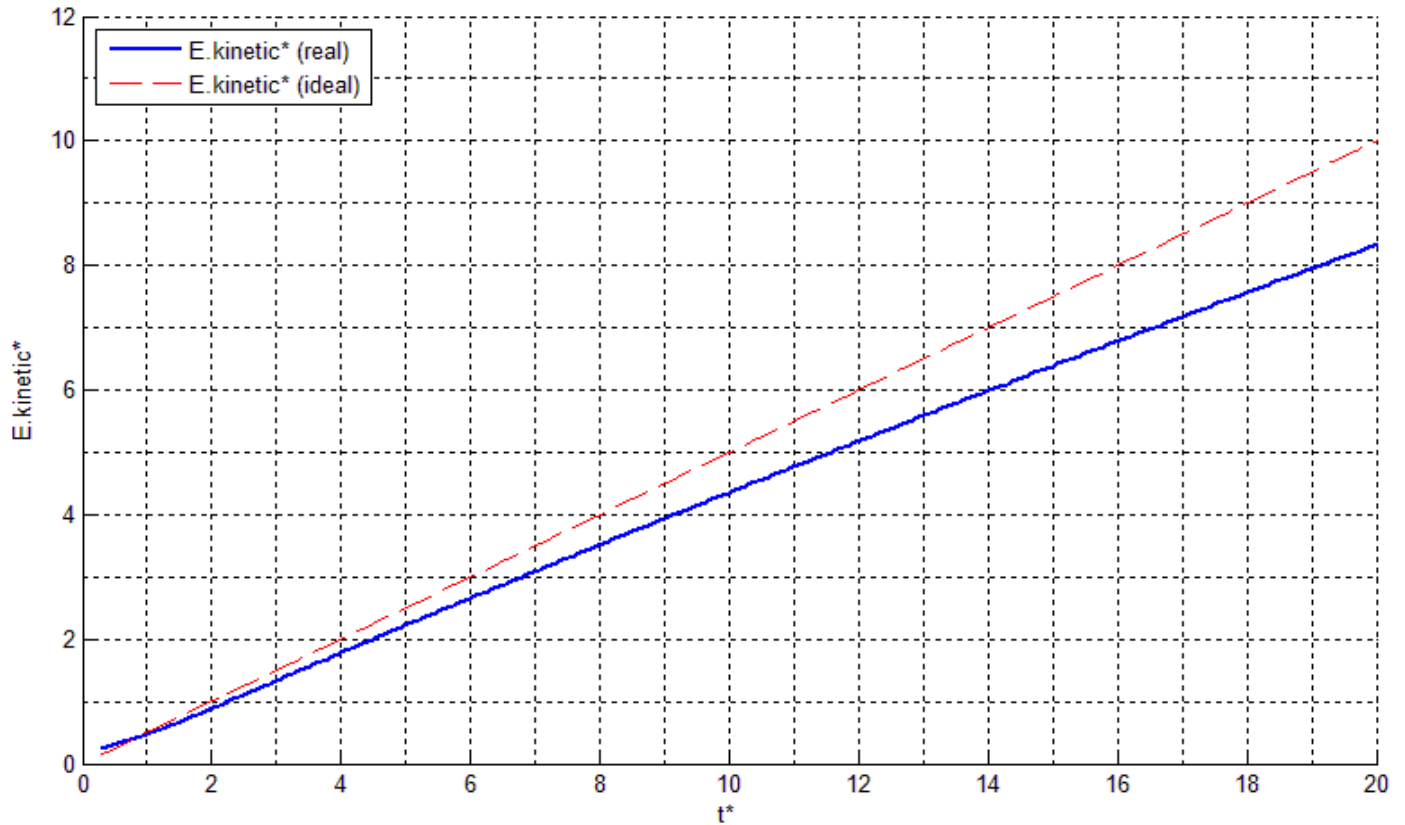


Figura 4.6.1. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo. Descarga de chorro agua-agua.

Se observa que la pendiente de la recta de ajuste es positiva. La explicación radica en que se está introduciendo un chorro de agua ininterrumpidamente, y por tanto, se está introduciendo de forma continuada una cantidad de masa en movimiento al volumen de control. Además, las partículas del volumen de control, que partían del reposo, adquieren cierta velocidad debido a la interacción con las partículas de chorro, y como se ha visto en la ecuación (3.2.34), al aumentar el número de partículas en movimiento contenidas en el volumen de control, la energía cinética del mismo aumenta con respecto al tiempo.

En la figura 4.6.1, se ha incluido en color rojo la evolución de la energía cinética con el tiempo para el caso ideal sin viscosidad y sin efecto de la gravedad, desarrollado teóricamente en el apartado 3.2.6. Como se observa en la gráfica, el efecto de la viscosidad hace disminuir la energía cinética en cada instante de tiempo al estar la curva experimental por debajo de la recta teórica sin viscosidad. A continuación vamos a cuantificar el efecto de la viscosidad en la energía cinética para el rango de tiempos adimensionales que se observan en la figura 4.6.1:

$$E_k^*(ideal) = 0,5 \cdot t^* \quad (4.6.2)$$

Si calculamos el porcentaje de variación de energía cinética del caso con viscosidad (real), respecto de caso sin viscosidad (ideal), para un mismo instante de tiempo, tenemos lo siguiente:

$$\%E_k^* = \frac{E_k^*(real) - E_k^*(ideal)}{E_k^*(ideal)} \cdot 100 \quad (4.6.3)$$

$$\%E_k^* = \frac{42}{t^*} - 18 \quad (4.6.4)$$

Por tanto, para el rango de tiempos adimensionales que estamos estudiando, $t^* \rightarrow 20$, la energía cinética se ve disminuida hasta un máximo del 16% respecto de la energía cinética del caso ideal, debido al efecto de la viscosidad del problema.

Debido a las dimensiones del volumen de control, la evolución de la energía cinética se ha estudiado hasta un tiempo adimensional, $t^* = 20$, donde hemos podido ajustar la curva de energía cinética a una recta. Sin embargo, la evolución de la energía cinética con respecto al tiempo no es una recta.

Aunque no se observe en la gráfica 4.6.1, debe notarse que a medida que aumenta el tiempo, la pendiente de la curva que representa la energía cinética va disminuyendo, o lo que es lo mismo, la energía cinética va aumentando cada vez más lentamente. Este comportamiento se explica debido a la viscosidad del agua, que genera unos esfuerzos viscosos entre el chorro y el resto de partículas del ambiente proporcional al gradiente de velocidad entre ambos y en oposición al movimiento. Dichos esfuerzos provocan la disminución progresiva de la velocidad en el área frontal del chorro (véase figura 4.2.2.). Sin embargo, debido a que se está introduciendo un chorro de agua ininterrumpidamente, la energía cinética en el volumen de control no llegará a decrecer en ningún momento.

4.6.2 Casos de flotabilidad negativa.

A diferencia del caso anterior, en este caso el chorro de agua es introducido en una mezcla de alcohol y agua con las características anteriormente descritas en el *Capítulo 2*.

La evolución de la energía cinética con respecto al tiempo en los casos de mezcla, $Fr = 5$ y $Fr = 10$, se representan a continuación en la gráfica 4.6.2.

Como se puede observar en la gráfica 4.6.2, la energía cinética sigue una evolución creciente no lineal para el intervalo de tiempos de la gráfica. A medida que avanzamos en el tiempo, la energía cinética contenida en el volumen de control aumenta cada vez más.

La forma no lineal de las curvas se debe a que en este caso estamos introduciendo un chorro de agua en un volumen de control formado por agua y alcohol. La diferencia de densidad entre el chorro y el resto de partículas del volumen de control provoca que la gravedad juegue un papel importante en la evolución del chorro.

Debido a las propiedades de la mezcla de fluidos que conforman el volumen de control, el chorro se comporta como un fluido pesado al tener una densidad mayor que el resto de partículas del ambiente, y por tanto, se ve favorecido en su movimiento por la fuerza de la

gravedad. A medida que avanzamos en el tiempo, las partículas en movimiento del ambiente se van acelerando cada vez más debido a la gravedad, lo cual, añadido a que cada vez existe una mayor cantidad de masa de chorro en todo el dominio, provoca el aumento cada vez mayor (no lineal) de la energía cinética en el ambiente.

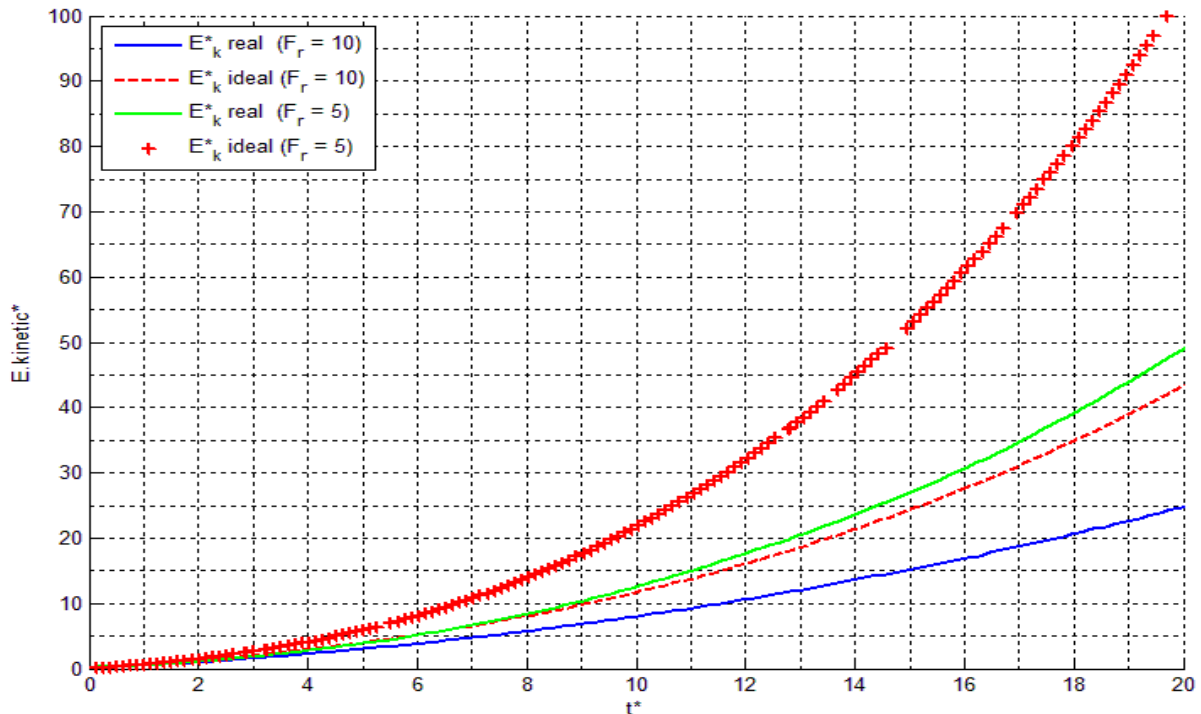


Figura 4.6.2. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo. Descarga de chorro de agua en mezcla alcohol y agua.

En la gráfica 4.6.2, también se ha incluido en color rojo la evolución de la energía cinética con respecto al tiempo para los casos ideales sin viscosidad y con efecto de la gravedad, desarrollados teóricamente en el apartado 3.2.6.

Como se observa en la gráfica 4.6.2, el efecto de la viscosidad hace que la energía cinética en el ambiente aumente más despacio en los casos prácticos. Este hecho se observa gráficamente al estar las curvas de los casos prácticos por debajo de sus respectivas curvas teóricas correspondientes a los casos sin viscosidad. La diferencia entre ambos casos se explica debido al efecto acelerador de la gravedad y al hecho de que a mayor gradiente de velocidad, mayores son las fuerzas de rozamiento generadas por la viscosidad.

A medida que aumenta el tiempo la diferencia de energía cinética contenida en el ambiente, entre la curva correspondiente al caso $Fr = 5$ y el caso $Fr = 10$ es cada vez mayor. Como se explicó anteriormente, el caso $Fr = 5$ representa un chorro de agua más pesado en relación con el ambiente, que el caso $Fr = 10$, por lo que se genera una fuerza volumétrica mayor en este caso. De esta forma, las partículas en movimiento en el caso $Fr = 5$ se aceleran más en un tiempo menor.

4.6.3 Estudio conjunto del caso homogéneo y los casos de flotabilidad negativa.

A continuación, utilizando la gráfica 4.6.3 procederemos a analizar y comparar la evolución de la energía cinética en todos los casos de estudio llevados a cabo, hasta un tiempo adimensional $t^* = 20$.

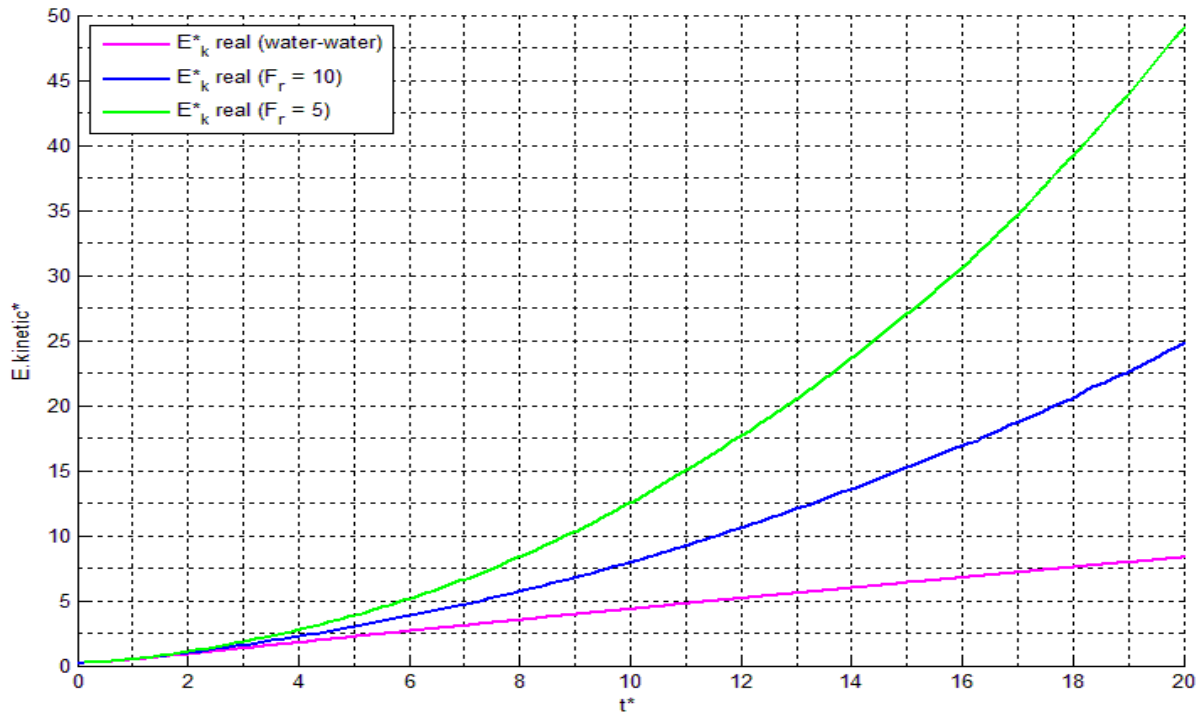


Figura 4.6.3. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio.

En primer lugar, realizaremos un análisis de lo que ocurre en los momentos iniciales, para posteriormente evaluar los resultados en el resto de tiempos adimensionales.

Para poder analizar lo que ocurre en los tiempos iniciales, representaremos a continuación en la gráfica 4.6.4 los datos de energía cinética obtenidos en dicho intervalo temporal.

En la gráfica 4.6.4, se han incluido las curvas de los tres casos prácticos reales (curvas de colores y trazo continuo) y las tres curvas obtenidas teóricamente correspondientes a cada caso ideal en ausencia del efecto de la viscosidad (curvas de color rojo punteadas).

Como se puede observar en la gráfica 4.6.4, en los tiempos iniciales las curvas de los casos prácticos están por encima de las curvas sin viscosidad obtenidas teóricamente, casos ideales. También se observa cómo la energía cinética en el ambiente “parece” comenzar con un valor inicial, mientras que en los casos ideales se observa cómo la energía cinética en el instante inicial es cero.

La explicación radica en dos puntos distintos: en primer lugar, la energía cinética obtenida teóricamente se refiere únicamente a la energía del chorro, mientras que la energía cinética en los casos prácticos se refiere a la contenida en el total del ambiente.

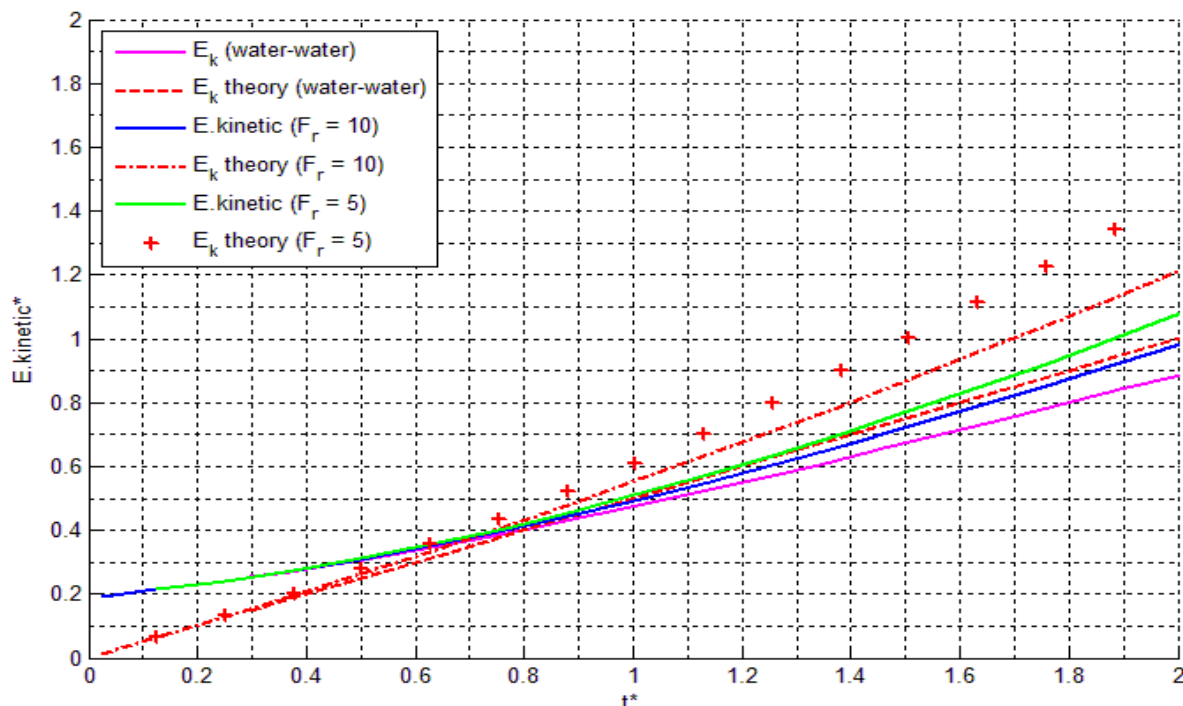


Figura 4.6.4. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio hasta $t^* = 2$.

En segundo lugar, y en relación con lo anterior, en el instante inicial el chorro de agua tiene una velocidad inicial mientras que el fluido contenido en el ambiente está completamente en reposo. Este hecho implica que en un tiempo muy pequeño, Δt^* , posterior al instante inicial, la velocidad del chorro debe transmitirse al ambiente de forma que las partículas del ambiente también adquieran una velocidad, y por tanto aumente el valor de la energía cinética.

De esta forma se explica que inicialmente en un tiempo muy pequeño, Δt^* , la energía cinética contenida en el ambiente aumente muy rápido. De igual manera también explica el hecho de que en el instante inicial haya que suministrar una mayor energía en forma de presión para vencer el estado de reposo en que se encuentran las partículas del ambiente. Esa energía adicional, que se aplicó para darle una velocidad inicial al chorro, se traduce en el incremento de energía cinética en los instantes iniciales.

Otra de las características que se pueden observar en la gráfica 4.6.4, es que en los instantes iniciales la energía cinética en los diferentes casos sigue una misma evolución. Esto se debe a que en los instantes iniciales todavía no ha transcurrido el suficiente tiempo y no entrado la suficiente masa de chorro como para que los efectos de la gravedad sean notables.

Como se ha explicado anteriormente y se observa en las gráficas 4.6.3 y 4.6.4, después de que se produzca la entrada del chorro de agua en el ambiente hay un periodo de adaptación. Este período se caracteriza por la distinta evolución de la energía cinética que además es función de las características físicas entre el fluido de entrada y el fluido en el ambiente.

En los instantes iniciales es cuando se registran los mayores gradientes de velocidad entre el frente del chorro y el ambiente. Como consecuencia de la diferencia de velocidades se generan unos esfuerzos viscosos que serán mayores en los instantes iniciales e irán frenando el avance del frente del chorro hasta equilibrarse la fuerza impulsora que genera la velocidad en la entrada del chorro con las fuerzas viscosas en el frente del mismo. Esto se puede observar en la figura 4.2.6, donde se representa la evolución de la velocidad del frente del chorro. Al principio la velocidad del frente del chorro es igual a la velocidad de entrada, pero a medida que el chorro avanza en el ambiente se ve frenado por el efecto de la viscosidad. En el apartado 4.2, se analiza en detalle la evolución de la velocidad del frente del chorro.

Además de lo anteriormente expuesto, cabe indicar que la evolución de la energía cinética en el ambiente también depende de las características físicas de los fluidos implicados. Al mismo tiempo, también afecta a la evolución de la energía cinética en los instantes iniciales el hecho de que haya partículas del ambiente que hayan adquirido una velocidad debido a la adaptación de velocidad entre el chorro y el ambiente en un instante, Δt^* , y que a medida que avanza el tiempo estas partículas sólo pierden velocidad debido a la viscosidad, disminuyendo la energía cinética que inicialmente hubo en el ambiente.

A continuación, en la gráfica 4.6.5 se muestra ampliada la evolución temporal de la energía cinética en todos los casos de estudio. En la gráfica 4.6.5 puede observarse para los distintos casos de estudio, la cantidad de energía cinética adimensional aportada por el chorro y por tanto, introducida en todo el dominio. Para un tiempo adimensional 4, podemos observar en la gráfica 4.6.5, el valor de la energía cinética adimensional introducida en cada uno de los tres casos de estudio:

$$\text{Caso homogéneo (Agua – Agua):} \quad E_k^*(t^* = 4) = 1.80 \quad (4.6.5)$$

$$\text{Caso de mezcla } (F_r = 10): \quad E_k^*(t^* = 4) = 2.25 \quad (4.6.6)$$

$$\text{Caso de mezcla } (F_r = 5): \quad E_k^*(t^* = 4) = 2.75 \quad (4.6.7)$$

En el apartado 4.5, únicamente se pudo observar el “*pinch-off*” para el caso homogéneo, momento en que se producía la desconexión del vórtice de cabeza respecto del chorro de cola. Se comprobó que el número de formación es igual a 4, y como observamos en la ecuación (4.6.5) la energía cinética aportada al ambiente en ese tiempo es igual a 1.80. Aunque no se ha podido observar el “*pinch-off*” en los casos de mezcla, se ha calculado la energía cinética en el mismo instante, $t^* = 4$, observando que su valor aumenta en función del mayor efecto de las fuerzas de flotabilidad al disminuir el número de Froude.

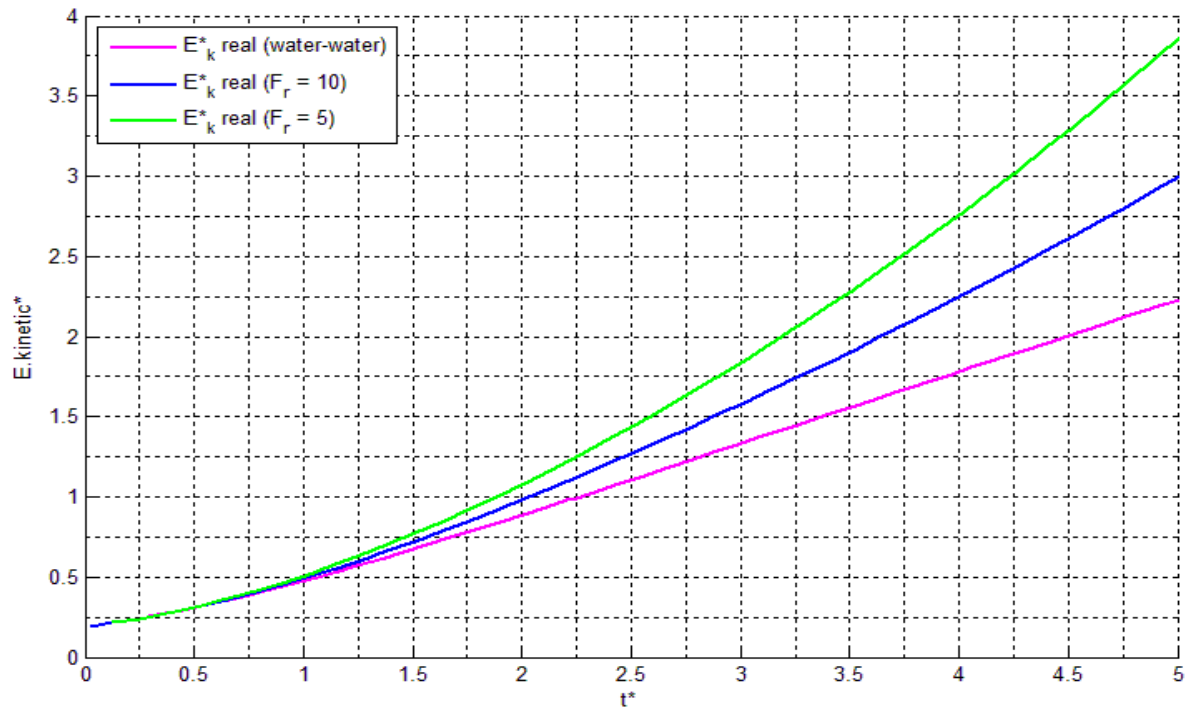


Figura 4.6.5. Evolución de la energía cinética adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio hasta $t^* = 5$.

Para finalizar con el análisis de la energía cinética se va a comparar el conjunto de todos los casos analizados, en todo el rango temporal de estudio, mostrando las ecuaciones que rigen la evolución de la energía cinética.

Como se ha visto en el apartado anterior, la evolución de chorro en el interior del ambiente requiere de un periodo de adaptación que afecta, entre otros parámetros, a la evolución de la energía cinética. Por tanto, a la hora de analizar el conjunto de todos los casos se realizará desde el momento en que este periodo de adaptación haya finalizado en todos ellos de forma que se pueda analizar la evolución de la energía cinética sin tener en cuenta los efectos debidos a los instantes iniciales.

En cada caso de estudio, el periodo de adaptación finaliza en un tiempo adimensional distinto que será considerado desde el momento en que la velocidad del frente del chorro deje de disminuir. En ese momento, el efecto de los esfuerzos viscosos provocados por la diferencia entre la velocidad inicial del chorro y el estado de reposo del ambiente, se habrá reducido hasta equilibrarse con la fuerza impulsora que le proporciona la velocidad de entrada al chorro. Desde ese momento, en función del caso que se considere, la velocidad del frente del chorro aumentará si el chorro se ve afectado por las fuerzas de flotabilidad, o se mantendrá constante con el tiempo en un principio, en el caso en que el chorro no se vea afectado por la flotabilidad.

Para determinar el momento en que el tiempo de adaptación ha finalizado en todos los casos de estudio se observará la figura 4.2.6, pudiéndose establecer que para todos ellos, desde un tiempo adimensional $t^*=3$ la evolución de la energía cinética ya no se ve afectada por las

características de los instantes iniciales. Observando la gráfica 4.6.3, ajustaremos las curvas a ecuaciones del tipo:

$$E_c^* = B \cdot (t^*)^m \quad (4.6.8)$$

, de forma que tomando logaritmos y representando gráficamente los casos de estudio, podamos obtener los parámetros B y m, mediante el ajuste a una recta de tendencia de la forma:

$$\log(E_c^*) = \log(B) + m \cdot \log(t^*) \quad (4.6.9)$$

En la figura 4.6.6 se representan las gráficas de evolución de energía cinética después de haber tomado logaritmos.

Posteriormente mostramos las ecuaciones obtenidas, que definen el comportamiento de la energía cinética adimensional, comprobando que los valores que obtuvimos en las ecuaciones (4.6.5) – (4.6.7) se ajustan adecuadamente a los valores obtenidos mediante las ecuaciones.

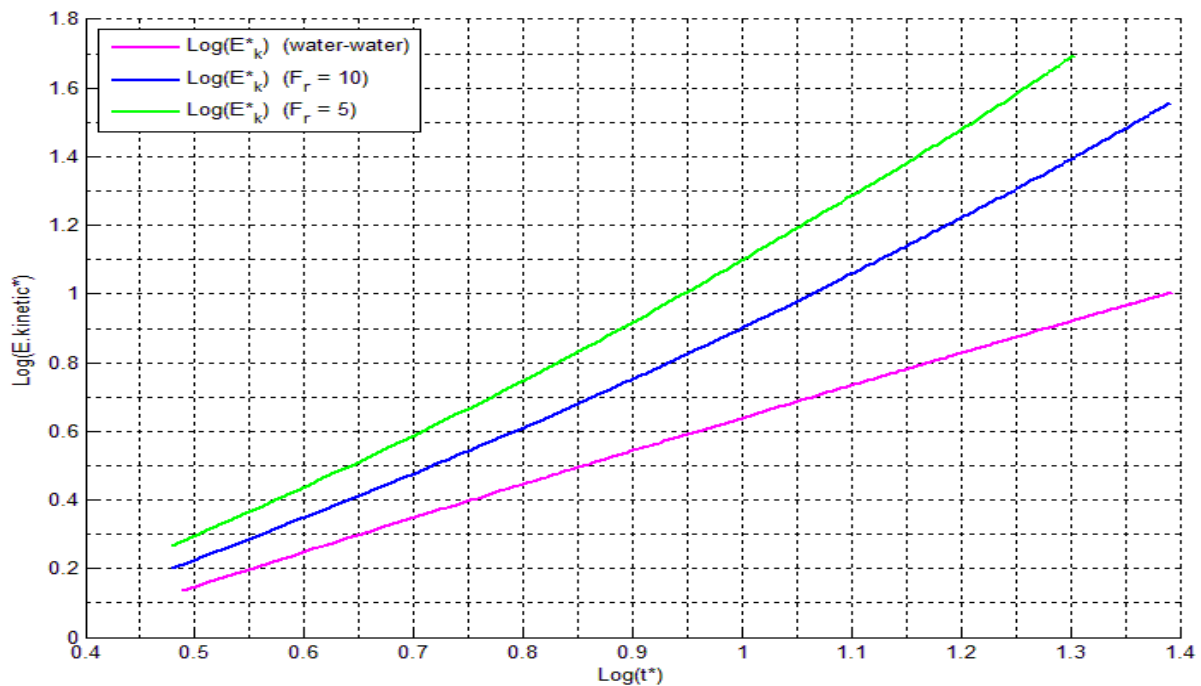


Figura 4.6.6. Evolución del logaritmo de la energía cinética adimensional en función del logaritmo del tiempo adimensional en todos los casos de estudio desde $t^* = 3$ hasta $t^* = 20$.

Las rectas de ajuste obtenidas para cada caso de estudio son las siguientes:

- **Caso 1. Chorro de agua en ambiente formado por agua.**

Recta de ajuste del caso práctico real:

$$\log(E_c^*) = 0,96 \cdot \log(t^*) - 0,32 \quad (R^2 = 99,9\%) \quad (4.6.10)$$

$$E_c^* = 0,48 \cdot t^{*0,96} \quad (4.6.11)$$

Recta de ajuste del caso teórico ideal:

$$E_c^* = 0,5 \cdot t^* \quad (4.6.12)$$

- **Caso 2. Chorro de agua en ambiente formado por mezcla con $Fr = 10$.**

Recta de ajuste del caso práctico real:

$$\log(E_c^*) = 1,48 \cdot \log(t^*) - 0,56 \quad (R^2 = 99,7\%) \quad (4.6.13)$$

$$E_c^* = 0,28 \cdot t^{*1,48} \quad (4.6.14)$$

Recta de ajuste del caso teórico ideal:

$$\log(E_c^*) = 1,66 \cdot \log(t^*) - 0,57 \quad (R^2 = 99,4\%) \quad (4.6.15)$$

$$E_c^* = 0,27 \cdot t^{*1,66} \quad (4.6.16)$$

- **Caso 3. Chorro de agua en ambiente formado por mezcla con $Fr = 5$.**

Recta de ajuste del caso práctico real:

$$\log(E_c^*) = 1,78 \cdot \log(t^*) - 0,66 \quad (R^2 = 99,7\%) \quad (4.6.17)$$

$$E_c^* = 0,22 \cdot t^{*1,78} \quad (4.6.18)$$

Recta de ajuste del caso teórico ideal:

$$\log(E_c^*) = 2 \cdot \log(t^*) - 0,64 \quad (R^2 = 99,6\%) \quad (4.6.19)$$

$$E_c^* = 0,23 \cdot t^{*2} \quad (4.6.20)$$

Una vez obtenidas las rectas de ajuste, comparando el exponente del tiempo adimensional, m , de los distintos casos, se observa la diferente tasa de crecimiento de la energía cinética en función del tiempo adimensional, siendo mayor en los casos de mezcla que en el caso homogéneo. Claramente se observa el efecto de la gravedad aumentando la velocidad, y por tanto, la energía cinética del chorro.

Finalmente, mediante las ecuaciones (4.6.11), (4.6.14) y (4.6.18), queda caracterizada la evolución de la energía cinética adimensional en función del tiempo adimensional para los distintos casos prácticos estudiados.

4.7 Impulso hidrodinámico.

En este apartado se va a analizar la evolución temporal del impulso hidrodinámico calculado en el total del dominio. Para cada caso de estudio se va a obtener una ecuación de evolución del impulso hidrodinámico adimensional en función del tiempo adimensional.

Mediante el análisis de los resultados obtenidos se investiga la importancia de la formación del vórtice principal de cabeza en el impulso hidrodinámico. En el caso de estudio homogéneo se obtendrá el valor del impulso hidrodinámico total en el momento de producirse el “*pinch-off*”, mientras que en los casos de mezcla, al no observarse dicho “*pinch-off*”, se podrá obtener el valor del impulso hidrodinámico en cada instante de tiempo mediante el uso de las ecuaciones de evolución obtenidas.

4.7.1 Caso homogéneo.

Utilizando la misma estructura que en todo el documento, comenzamos analizando el caso homogéneo representado en la gráfica 4.7.1.

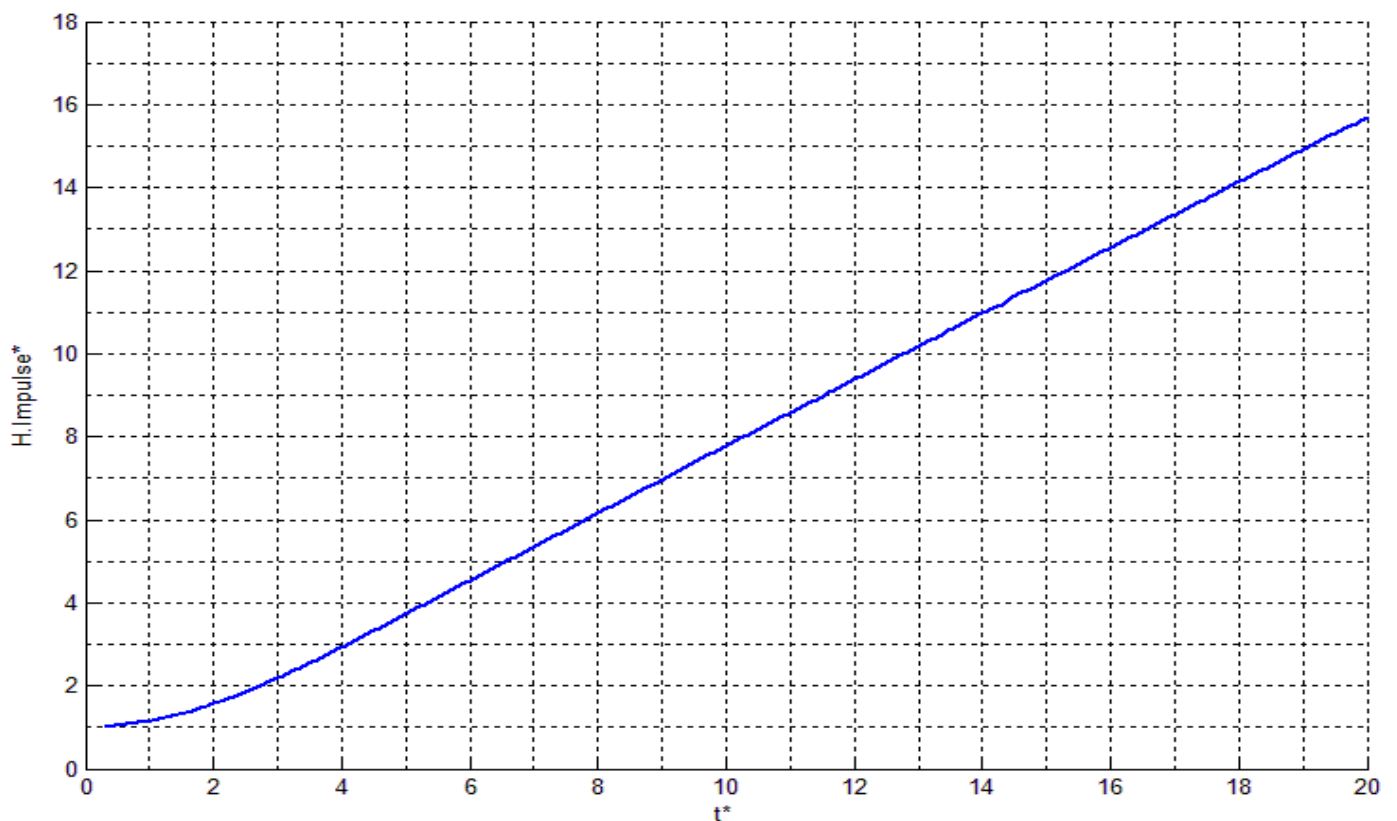


Figura 4.7.1. Evolución del impulso hidrodinámico adimensional en el tiempo. Descarga de chorro agua-agua.

Como podemos observar en la gráfica 4.7.1, la evolución temporal del impulso hidrodinámico es lineal, a excepción de los instantes iniciales donde la pendiente de la curva no es constante.

Como se explicó en los apartados 3.2.7 y 4.6.3, en los instantes iniciales, se produce una sobrepresión debida a la inyección del chorro de agua a una cierta velocidad constante, U_j , en el interior de un volumen de control que inicialmente se encuentra en reposo. Dicha sobrepresión, genera un impulso adicional que se observa en la gráfica 4.7.1 como parte del valor inicial del impulso hidrodinámico. Durante los instantes posteriores continua la formación del vórtice principal, registrándose un periodo de adaptación definido en el apartado 4.6.3, que finaliza en $t^* = 3$, y durante el cual la pendiente de la curva que representa el impulso hidrodinámico se incrementa progresivamente. Durante todo este periodo inicial el efecto del impulso de presión es cada vez menor, hasta que finalmente se produce el “*pinch-off*” y el impulso de presión deja de ser relevante.

Una vez finalizado el periodo de adaptación, la evolución del impulso hidrodinámico adimensional es lineal, siendo el valor de la pendiente igual a 0.8. La pendiente de la curva es siempre positiva, teniendo su explicación en la propia definición del impulso hidrodinámico, puesto que si estamos introduciendo un chorro de agua ininterrumpidamente en el ambiente, el impulso necesario para generar el estado de movimiento de dicho ambiente, partiendo de una situación de reposo, será cada vez mayor al existir mayor cantidad de masa en movimiento en cada instante.

4.7.2 Casos de flotabilidad negativa.

A continuación representaremos en la gráfica 4.7.2, la evolución del impulso hidrodinámico en los dos casos de mezcla estudiados, $Fr = 5$ y $Fr = 10$.

La evolución temporal del impulso hidrodinámico en ambos casos de mezcla es muy parecida en los instantes iniciales debido a que todavía no se aprecian los efectos de las fuerzas de flotabilidad. Posteriormente, el impulso hidrodinámico aumenta progresivamente a medida que se avanza en el tiempo.

Como puede observarse en la gráfica 4.7.2, la evolución temporal del impulso hidrodinámico es positiva y exponencial, lo que se debe al efecto cada vez mayor de las fuerzas de flotabilidad sobre el chorro. El efecto de las fuerzas de flotabilidad es mayor en el caso de mezcla $Fr = 5$, y por tanto, como se observa en la gráfica el impulso hidrodinámico es mayor con respecto al caso de mezcla $Fr = 10$. Al igual que en el caso homogéneo, la explicación a que el impulso hidrodinámico sea creciente en todo el rango de tiempos estudiado se debe a que se está inyectando el chorro de agua de forma ininterrumpida.

En los instantes iniciales se observa cómo durante el periodo de adaptación el crecimiento del impulso hidrodinámico en el tiempo es menor en ambos casos de mezcla con respecto a la evolución en tiempos mayores. El motivo de que el impulso hidrodinámico evolucione de

esta forma se debe, al igual que se explicó en el apartado 4.6 relativo a la energía cinética, a que en los instantes iniciales el volumen de control se encuentra en reposo y es necesario un periodo de adaptación, definido como $t^* = 3$, durante el cual se aceleran las partículas del mismo.

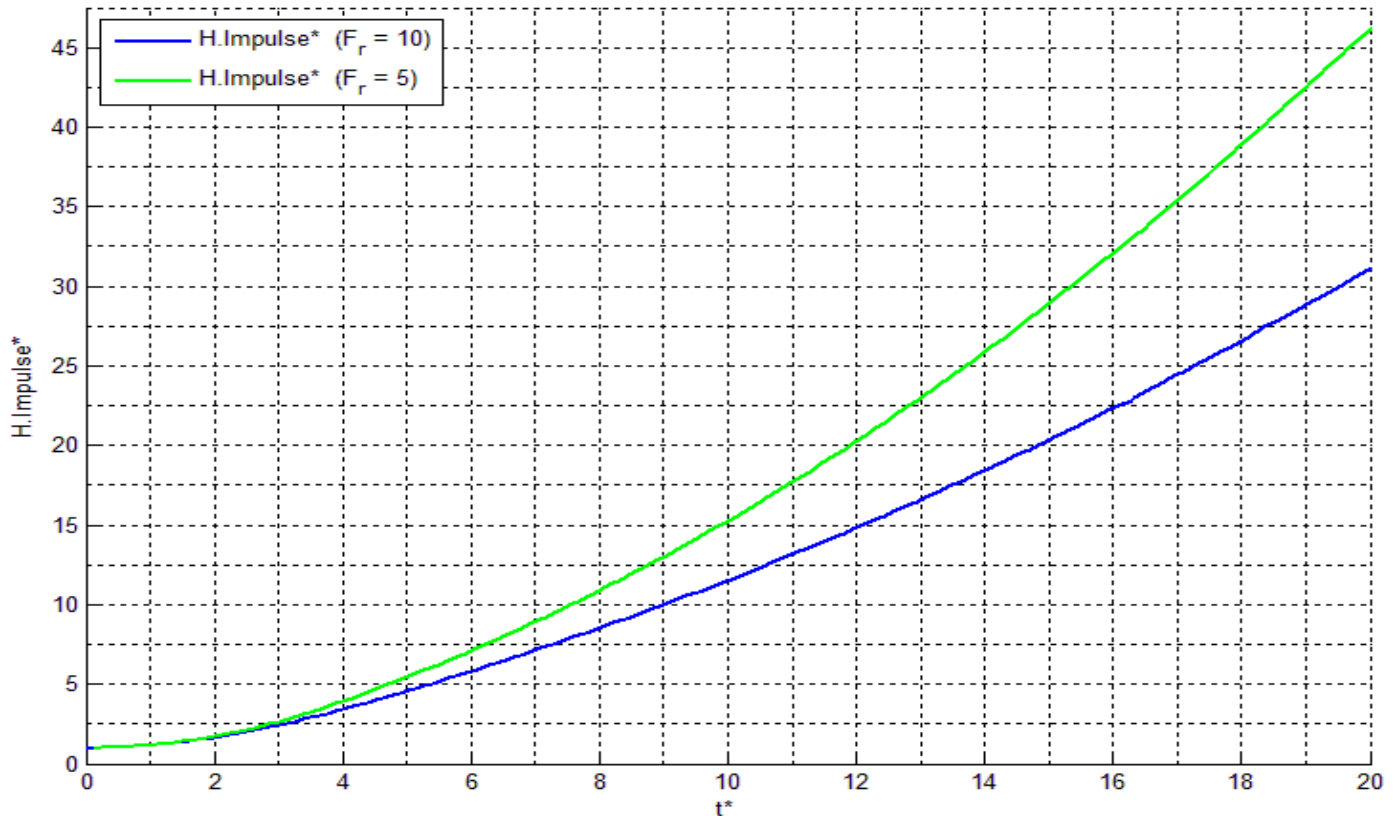


Figura 4.7.2. Evolución del impulso hidrodinámico adimensional en el tiempo. Descarga de chorro de agua en mezcla alcohol y agua.

4.7.3 Estudio conjunto del caso homogéneo y los casos de flotabilidad negativa.

Una vez analizada individualmente la evolución del impulso hidrodinámico en cada caso de estudio, procederemos a analizarlos en conjunto observando sus similitudes y diferencias, obteniendo conclusiones de carácter general que engloben ambos casos.

Como podemos observar en la figura 4.7.3, el valor adimensional del impulso hidrodinámico en los instantes iniciales es coincidente en los tres casos de estudio. A medida que avanzamos en el tiempo las diferencias entre los casos de estudio se acentúan, poniendo de manifiesto el efecto de la gravedad, en forma de fuerzas de flotabilidad, sobre la evolución del impulso hidrodinámico. Por tanto, puede concluirse que para un tiempo adimensional, t^* , a medida que se disminuye el número de Froude el impulso hidrodinámico total aumenta.

Es de especial interés analizar mediante la gráfica 4.7.4, la evolución de la derivada del impulso hidrodinámico adimensional respecto del tiempo adimensional, de forma que podamos distinguir de una forma más clara variaciones en el comportamiento del impulso hidrodinámico.

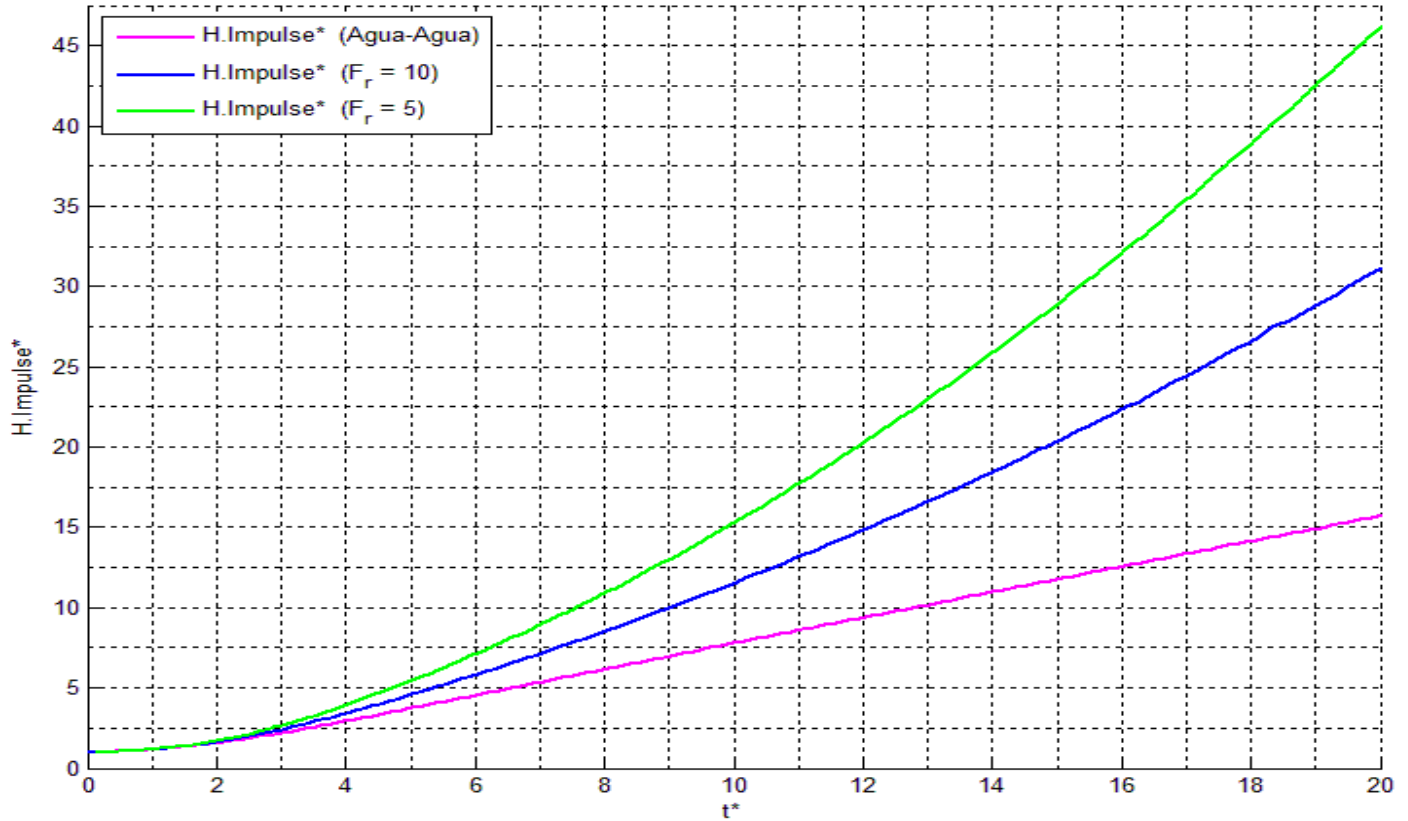


Figura 4.7.3. Evolución del impulso hidrodinámico adimensional en el tiempo en todos los casos de estudio.

En la gráfica 4.7.4, se ha incluido conjuntamente para todos los casos, la evolución en el tiempo del valor de la derivada temporal del impulso hidrodinámico. Debido a que el valor de la derivada del impulso hidrodinámico se ha obtenido utilizando los propios datos del impulso hidrodinámico sobre la ecuación (4.7.1), ha sido necesario ajustar posteriormente los datos obtenidos a polinomios de cuarto grado para eliminar las discontinuidades, mostrando las curvas de ajuste en la gráfica 4.7.4 con trazo rayado.

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I(t_2) - I(t_1)}{t_2 - t_1} \quad t_2 > t_1 \quad (4.7.1)$$

Como puede observarse en la gráfica 4.7.4, a partir del tiempo adimensional, $t^* = 4$, la tendencia de las curvas para todos los casos de estudio se ve alterada.

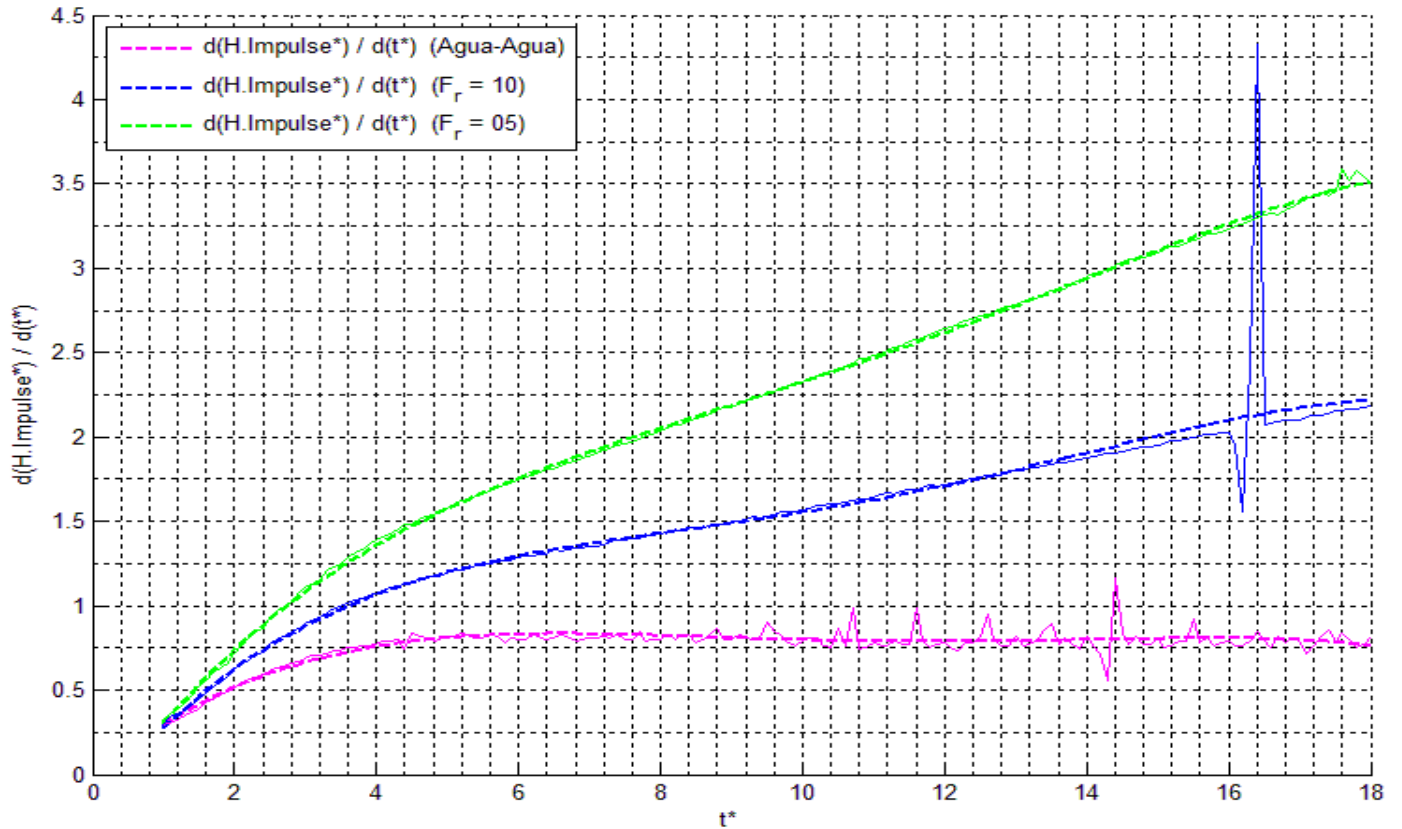


Figura 4.7.4. Evolución de la derivada temporal del impulso hidrodinámico adimensional en todos los casos de estudio.

El caso homogéneo, como se ha visto en el *apartado 4.5*, es el único en el que hemos podido observar el proceso de “*pinch-off*” que ocurre en el tiempo adimensional $t^* = 4$, correspondiéndose con el número universal de formación. Por tanto, mediante la gráfica 4.7.4, podemos concluir que una vez se produce el “*pinch-off*”, la variación en el tiempo del impulso hidrodinámico total permanece constante. Este hecho está en relación con el concepto de maximización de la energía, explicado en el *apartado 3.2.7*, según el cual, el vórtice principal es capaz de absorber energía hasta un valor máximo con respecto al impulso que lo genera. Debe notarse, que como se está introduciendo un chorro de agua ininterrumpidamente y a velocidad constante, el valor de la derivada del impulso hidrodinámico con respecto al tiempo se mantiene constante una vez producido el “*pinch-off*” y con valor igual a 0.8.

Por el contrario, en los casos de mezcla, no ha sido posible observar el “*pinch-off*” por lo que no podemos establecer el valor del número de formación para dichos casos. No obstante, observando la gráfica 4.7.4, se puede concluir que para un tiempo adimensional $t^* = 4$ se produce un cambio de tendencia en la evolución del impulso hidrodinámico en los casos de mezcla. Además, dicho valor de tiempo adimensional se encuentra dentro del rango establecido por *Gharib et al.* [2] para el número de formación: [3.6 - 4.5]. En los casos de mezcla, la evolución de la derivada temporal del impulso hidrodinámico a partir de $t^* = 4$, es lineal creciente lo cual implica un aumento constante del impulso hidrodinámico en cada incremento de tiempo. Este hecho puede explicarse en base a la inyección ininterrumpida del

chorro de agua a velocidad constante, y a la generación de vorticidad baroclínica que aumenta el valor del impulso hidrodinámico.

A continuación, siguiendo el mismo razonamiento que en el *apartado 4.5*, obtendremos las ecuaciones de evolución del impulso hidrodinámico en los tres casos de estudio. Del mismo modo que en el *apartado 4.5*, se ajustarán las curvas a ecuaciones del tipo (4.7.2), para tiempos adimensional mayores a $t^* = 3$, correspondiente al tiempo de adaptación.

$$I = B \cdot t^m \quad (4.7.2)$$

Tomando logaritmos a los datos obtenidos del impulso hidrodinámico adimensional y representándolos en la gráfica 4.7.5 respecto del logaritmo del tiempo adimensional, observamos rectas de la siguiente forma:

$$\log(I) = \log(B) + m \cdot \log(t) \quad (4.7.3)$$

A continuación representamos la gráfica 4.7.5, en base a la cual obtendremos las ecuaciones de evolución temporal del impulso hidrodinámico.

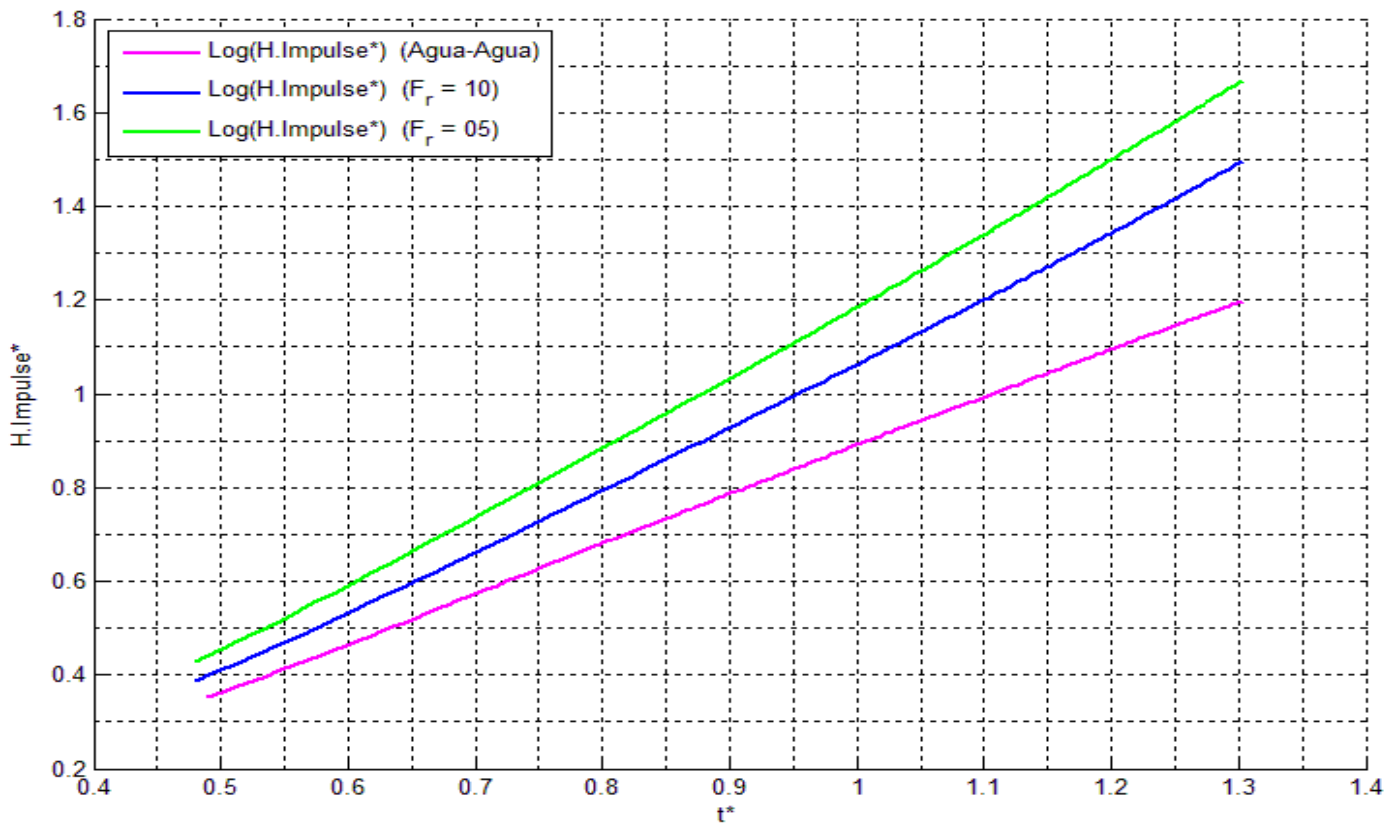


Figura 4.7.5. Evolución del logaritmo del impulso hidrodinámico adimensional en función del logaritmo del tiempo adimensional en todos los casos de estudio desde $t^* = 3$ hasta $t^* = 20$.

Las rectas de ajuste obtenidas para cada caso de estudio son las siguientes:

- **Caso 1. Chorro de agua en volumen de control formado por agua.**

$$\log(I^*) = 1,04 \cdot \log(t^*) - 0,15 \quad (R^2 = 99,9\%) \quad (4.7.4)$$

$$I^* = 0,71 \cdot t^{*1,04} \quad (4.7.5)$$

- **Caso 2. Chorro de agua en volumen de control formado por mezcla con $Fr = 10$.**

$$\log(I^*) = 1,36 \cdot \log(t^*) - 0,29 \quad (R^2 = 99,9\%) \quad (4.7.6)$$

$$I^* = 0,51 \cdot t^{*1,36} \quad (4.7.7)$$

- **Caso 3. Chorro de agua en volumen de control formado por mezcla con $Fr = 5$.**

$$\log(I^*) = 1,52 \cdot \log(t^*) - 0,33 \quad (R^2 = 99,9\%) \quad (4.7.8)$$

$$I^* = 0,47 \cdot t^{*1,52} \quad (4.7.9)$$

Mediante las ecuaciones (4.7.5), (4.7.7) y (4.7.9) queda definida la evolución del impulso hidrodinámico adimensional en todos los casos de estudio.

Finalmente calculamos el impulso hidrodinámico para un tiempo adimensional $t^* = 4$, que en el caso de estudio homogéneo se corresponde con el número de formación.

$$\text{Caso homogéneo (Agua – Agua):} \quad I^*(t^* = 4) = 3.00 \quad (4.7.10)$$

$$\text{Caso de mezcla } (Fr = 10): \quad I^*(t^* = 4) = 3.36 \quad (4.7.11)$$

$$\text{Caso de mezcla } (Fr = 5): \quad I^*(t^* = 4) = 3.87 \quad (4.7.12)$$

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de este proyecto hemos descrito la fluidodinámica implicada en la formación de vórtices. Los casos de estudio abarcan la inyección de chorros en el interior de fluidos de distinta densidad, en presencia de la acción de la gravedad y la viscosidad, despreciando los efectos de la temperatura.

En la última parte del *Capítulo 1*, hacíamos referencia a las aplicaciones prácticas que tienen como base los conceptos y análisis descritos en el presente proyecto. Hemos proporcionado los medios y conocimientos necesarios para obtener las respuestas a ciertas preguntas que surgen en el desarrollo de cualquier aplicación práctica que necesite un control de los vórtices generados: ¿Cuándo un anillo de vorticidad llega a un punto específico? ¿A qué distancia viaja un anillo de vorticidad? ¿Cuánto ha crecido el anillo de vorticidad en el momento de impacto?

Las conclusiones directas relacionadas con los casos de estudio llevados a cabo, y que dan respuesta a las preguntas formuladas anteriormente, pueden encontrarse en detalle en el *Capítulo 4*. En este capítulo haremos una recopilación de los resultados obtenidos, y hablaremos de las aportaciones nuevas de este proyecto, así como de futuras líneas de investigación para próximos trabajos relacionados con la materia.

A continuación describimos varias de las conclusiones obtenidas como fruto de la realización del presente proyecto:

- El efecto de la flotabilidad sobre chorros inyectados en otros fluidos en presencia de la gravedad, condiciona altamente los resultados obtenidos. Observándose que el número de Froude densimétrico se erige como parámetro fundamental en la evaluación y cuantificación del efecto de la flotabilidad sobre el chorro inyectado.
- En el presente proyecto se han utilizado por primera vez números de Froude densimétricos mayores que 1: $Fr = 5$ y $Fr = 10$.
- Como consecuencia de las fuerzas de flotabilidad generadas por el efecto de la gravedad, la mayor parte de los parámetros de estudio como son: la posición y velocidad, tanto del frente del chorro como del vórtice principal; y la circulación, energía cinética e impulso hidrodinámico calculados en todo el dominio, se ven incrementados exponencialmente con el tiempo.
- Las fuerzas de flotabilidad generadas por el efecto de la gravedad tienen un efecto distinto sobre la vorticidad y la circulación en el torbellino principal, en comparación con el efecto producido sobre resto de parámetros de estudio. Dicho efecto está vinculado con la generación de vorticidad baroclínica, que como hemos observado no se ve afectada exponencialmente por el número de Froude, sino que sigue una evolución lineal.
- Se ha demostrado teóricamente, y analizado a través de los resultados obtenidos, la diferencia existente entre el centro del vórtice principal calculado como el punto de mínima presión estática y el punto de máxima vorticidad.
- En el presente proyecto se han analizado unos rangos de tiempos mayores en comparación con proyectos anteriores. De forma que se ha podido observar la evolución del chorro de agua durante un tiempo mayor, obteniendo una visión más general del proceso de inyección y desarrollo del vórtice. Para tiempos adimensionales inferiores a $t^* = 20$, y números de Froude menores de 10, no se observa el “*pinch off*” en los casos de mezcla.
- Se ha utilizado un nuevo método de cálculo para realizar el seguimiento del vórtice principal de cabeza. Como resultado de la aplicación de dicho método, hemos podido obtener la evolución temporal de la circulación en el vórtice principal de cabeza en los casos de mezcla, cuando no se observa el “*pinch-off*”.
- Este proyecto es el primero que incluye el estudio de la evolución temporal de la energía cinética e impulso hidrodinámico en todo el dominio. Como resultado de dicho estudio hemos podido comprobar la evolución de ambos parámetros durante la formación del vórtice principal, obtenido las ecuaciones matemáticas que rigen dicho comportamiento.
- Fruto del análisis de la evolución temporal del impulso hidrodinámico, y debido a que su definición es función de la vorticidad, hemos podido comprobar el principio de maximización de la energía en el caso homogéneo. En los casos de mezcla, no se

pueden realizar las mismas conclusiones debido a que no se observa el “*pinch-off*”, no obstante, los resultados obtenidos parecen indicar que el mismo principio de maximización de la energía se cumple en los casos de mezcla.

- Finalmente, en este proyecto se han aportado ejemplos de diversas aplicaciones relacionadas con los conceptos y experimentos analizados. Dichas aplicaciones abarcan diversas disciplinas muy distintas unas de otras, dejando patente la gran presencia e importancia de los vórtices en el mundo real.

Se ha realizado una comparativa de la validez de los resultados obtenidos para el caso homogéneo, analizando los resultados que son equivalentes obtenidos en este proyecto con los obtenidos en el Proyecto Fin de Carrera de Víctor Manuel Gómez [20]. La comparativa se incluye en el *Anexo D*.

5.1 Trabajos futuros.

Gracias al conocimiento adquirido tanto en la realización del presente proyecto, como en la lectura de la bibliografía y proyectos anteriores, se pueden indicar varias líneas de actuación para la realización de trabajos futuros:

- Debido a que no hemos podido observar el “*pinch-off*” en los casos de mezcla llevados a cabo en el presente proyecto, se abre la posibilidad de generar nuevos casos aumentando el valor del número de Froude entre otros parámetros, con el objetivo de visualizar el “*pinch-off*” en los casos de mezcla y poder evaluar el número de formación.
- Se propone mejorar el sistema de seguimiento del vórtice principal de cabeza, de forma que sea automático en base a ciertos parámetros del chorro.
- Se propone el estudio de la evolución temporal de la energía cinética y el impulso hidrodinámico únicamente en el vórtice principal de cabeza.
- Se abre la posibilidad de generar nuevos casos de estudio en los que se evalúe la influencia del ángulo de inyección en los distintos parámetros de estudio. Entendiendo como ángulo de inyección aquel formado por el eje de la boquilla inyectora (o línea perpendicular al orificio de entrada) y la dirección de la fuerza de la gravedad.

Referencias

- [1] C. Eugene Wayne. “Vortices and Two-Dimensional Fluid Motion”. Notices of the American Mathematical Society, vol. 58, number 1, pp.10-20 (2011).
- [2] Morteza Gharib, Edmon Rambod, Karim Shariff. “A universal time scale for vortex ring formation”. Journal of Fluid Mechanics, vol. 360, pp. 121-140 (1998).
- [3] Krueger, Paul S. and Gharib, M. (2003). “The significance of vortex ring formation to the impulse and thrust of a starting jet”. Physics of Fluids, vol. 15, pp. 1271-1281. (2003).
- [4] William J. Stewart, Ian K. Bartol and Paul S. Krueger. “Hydrodynamic fin function of brief squid, *Lolliguncula brevis*”. The Journal of Experimental Biology, vol. 213, pp. 2009-2024. (2010).
- [5] Houshuo Jiang, Mark A. Grosenbaugh. “Numerical simulation of vortex ring formation in the presence of background flow with implications for squid propulsion”. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, vol. 20, pp. 103-123. (2006).
- [6] Paul S. Krueger, Ali A. Moslemi, J. Tyler Nichols, Ian K. Bartol and William J. Stewart. “Vortex Rings in Bio-inspired and Biological Jet Propulsion”. Advances in Science and Technology, vol. 58, pp. 237-246. (2008).
- [7] Thomas D. Potter, Bradley Roy Colman. “Handbook of weather, climate and water: dynamics, climate, physical meteorology, weather systems and measurements”. Wiley-Interscience, Section 1 Dynamic Meteorology. (2003).
- [8] Bruecker, C., Triep, M. and Kob, M. “Study of the vortex dynamics in a mechanical model of the vocal folds using Particle-Image Velocimetry”. Proceedings of the International Conference on Voice Physiology and Biomechanics in Marseille, France. (2004).

- [9] M. Jiang, R. Machiraju and D. Thompson. “Detection and Visualization of Vortices” In C. Johnson and C. Hansen, editors, *Visualization handbook*. Academic Press. (2004).
- [10] Alex C. Hoffmann, Louis E. Stein. “Gas Cyclones and Swirl Tubes: Principles, Design and Operation”. Springer. (2002).
- [11] José Ramón Fernández Aparicio. “Estudio numérico de la fluidodinámica de chorros transitorios con parada impulsiva en la inyección y diferencias de densidad”. Proyecto Fin de Carrera Universidad Carlos III de Madrid (2005).
- [12] Patrick McMurtry. “Chapter 6. Vorticity Dynamics” Course: ME 7960: Turbulence. The University of Utah.
- [13] G. Patnaik and K. Kailasanath. “Flame-Generated vorticity production in premixed flame-vortex interactions”. Naval Research Laboratory. NASA/CP—2003-212376/REV1.
- [14] Sheldon I. Green. “Fluid Vortices. Fluid Mechanics and Its Applications”. Kluwer Academic Publishers. (1995).
- [15] Saffman, P. G. “Vortex Dynamics”. Cambridge University Press. (1992).
- [16] Kip Thorne. “Chapter 13. Vorticity” Course: PH 136, Fall 2009. California Institute of Technology (Caltech). (2009).
- [17] Bhimsen K. Shivamoggi. “Hydrodynamic Impulse in a Compressible Fluid”. University of Central Florida. (2009).
- [18] Mónica Pardo Herrero. “Simulación numérica del campo de velocidad en chorros transitorios”. Proyecto Fin de Carrera Universidad Carlos III de Madrid. (2004).
- [19] Ángel Vidal Fernández. “Dinámica de chorros laminares de alcohol en agua con flotabilidad positiva”. Proyecto Fin de Carrera Universidad Carlos III de Madrid. (2011).
- [20] Víctor Manuel Gómez Espinosa. “Estudio de los efectos de la flotabilidad en chorros laminares transitorios”. Proyecto Fin de Carrera Universidad Carlos III de Madrid. (2011).
- [21] Marugán Cruz, C., Rodríguez Rodríguez, J., Martínez Bazán, C. “Negatively buoyant starting jets”. *Physics of Fluids*, vol. 21, 117101, pp. 117101-1 - 117101-14. (2009).
- [22] Weast, R. C. “Handbook of Chemistry and Physics”. CRC Press, 89ª edición, pp. 8-52 (2008).

Anexos

Anexo A. Generación del problema en Fluent.

En este apartado se realiza una descripción de la forma de reproducir en el programa de simulación numérica Fluent, los casos de estudio llevados a cabo en el presente proyecto.

No obstante no se entrará en detalle acerca del significado de todos los campos introducidos en el programa de simulación, así como de ciertos parámetros utilizados para la resolución numérica del problema, al no ser este el objeto de estudio del presente proyecto, habiéndose tratado estos temas ampliamente en otros Proyectos Fin de Carrera como [18] ó [20].

Por lo tanto, a lo largo del *Anexo A*, trataremos los aspectos más relevantes que guarden relación con las nuevas aportaciones del presente proyecto, de cara a la reproducción de los casos de estudio tratados.

En la figura A.1, se muestra la pantalla de inicio del programa Fluent. Se muestra esta captura de la pantalla de inicio debido a que en el post-procesado de los datos, generalmente trabajamos con archivos *Journal*, que irán recorriendo todos los pasos temporales (o casos, archivos “.cas”). Deseleccionando la casilla “*Display Mesh After Reading*”, ganaremos bastante tiempo en el post-procesado de los datos.

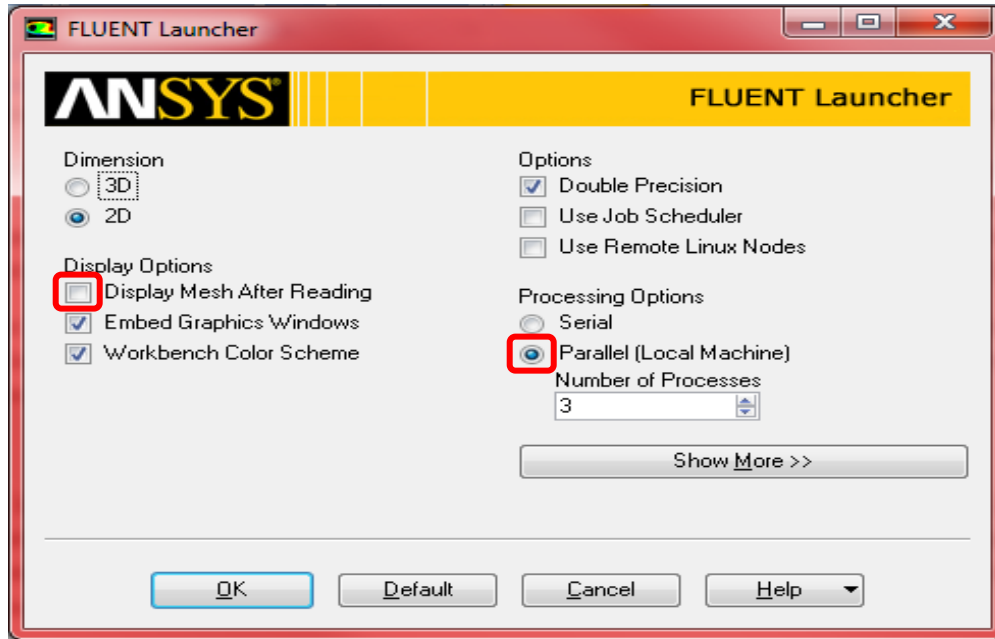


Figura A.1. Cuadro de diálogo inicial del programa Fluent.

Al mismo tiempo, en esta misma ventana inicial, figura A.1, se proporciona la opción de utilizar en paralelo más de un procesador del ordenador, en la generación de datos, o lo que es lo mismo, en la resolución de las ecuaciones del movimiento. Esta opción es posible debido a que la malla inicial ha sido particionada previamente, como se puede observar en la figura A.2.

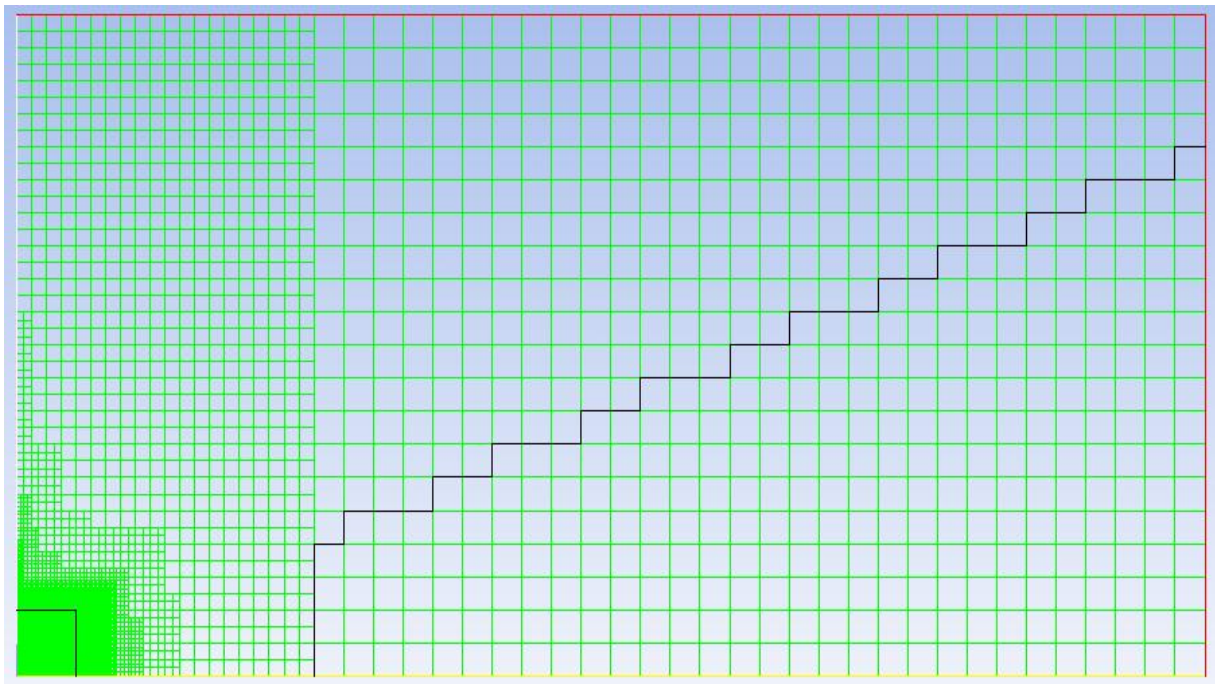


Figura A.2. Malla inicial en todo el dominio de cálculo.

A.1 Refinamiento dinámico de la malla.

Como también se observa en la figura A.2., el mallado es diferente en función de la zona del dominio en que nos encontremos. En las zonas próximas al chorro, donde queremos una mayor exactitud en los parámetros que lo caracterizan, se observa cómo la malla está más refinada, mientras que en las zonas alejadas al chorro, existe una mayor separación entre los nodos. Esta forma de resolución no sólo tiene sentido desde el punto de vista de la precisión en los resultados, sino que también es importante desde el punto de vista de la optimización del tiempo de cálculo y coste computacional.

Siguiendo el mismo razonamiento expuesto en el párrafo anterior, se deberá indicar en el programa Fluent un parámetro en base al cual se vaya refinando la malla a medida que el chorro de agua inyectado va penetrando en el ambiente.

En el caso homogéneo, al igual que en [18], el parámetro dinámico de refinamiento escogido es el gradiente de la concentración del escalar que más difunde, lo cual se corresponde con el escalar-3.

En cambio, en los casos de mezcla el parámetro de refinamiento escogido es el gradiente de presión, lo cual se debe a la diferencia de presiones existente entre el frente del chorro (máxima presión en el dominio) y el centro del vórtice (mínima presión en el dominio).

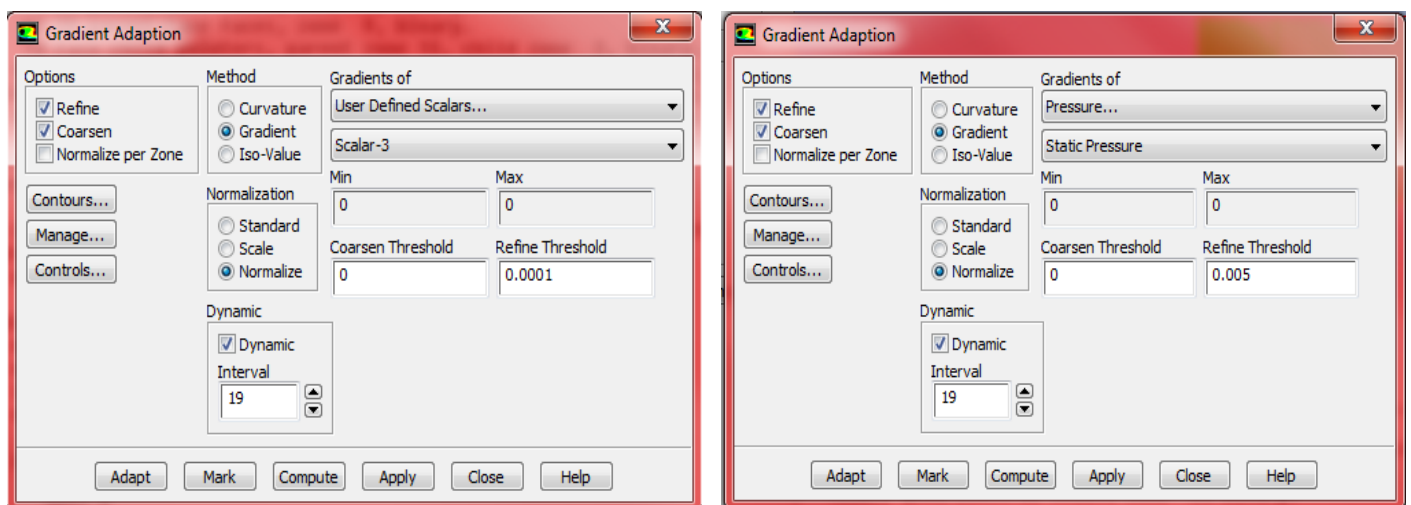


Figura A.3. Cuadro de diálogo de selección de parámetros de refinamiento de la malla. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

En la figura A.3., se muestran los parámetros de refinamiento escogidos, una vez hemos accedido al menú: *Adapt* → *Gradient*. Debe indicarse que en *el Anexo D*, se comparan los resultados obtenidos en este proyecto para el caso homogéneo, con aquellos obtenidos en [20], donde el parámetro de refinamiento dinámico utilizado para el caso homogéneo es el gradiente de presión.

Los resultados debidos al refinamiento de la malla se muestran en la figura A.4, donde se pueden observar las diferencias en el refinamiento de la malla al elegir entre el gradiente del escalar-3, o el gradiente de presiones como parámetro de refinamiento dinámico.

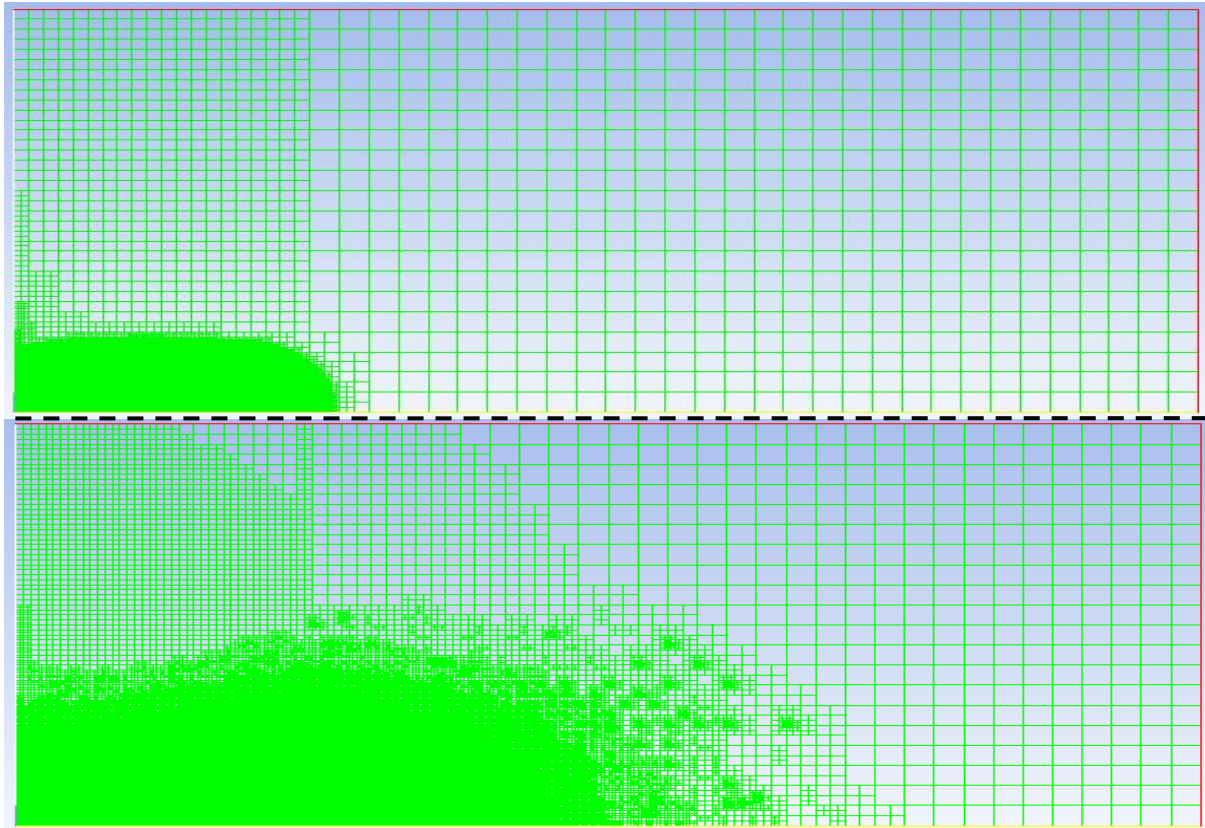


Figura A.4. Malla en todo el dominio de cálculo. Caso homogéneo (arriba) y Casos de mezcla (abajo).

A.2 Definición de las características generales del proyecto en Fluent.

En este apartado se definen las características generales que definen los casos de estudio en Fluent. Serán las mismas características que las vistas en el *apartado 3.1*, y se definen igual para todos los casos en el menú:

Define → *General*.

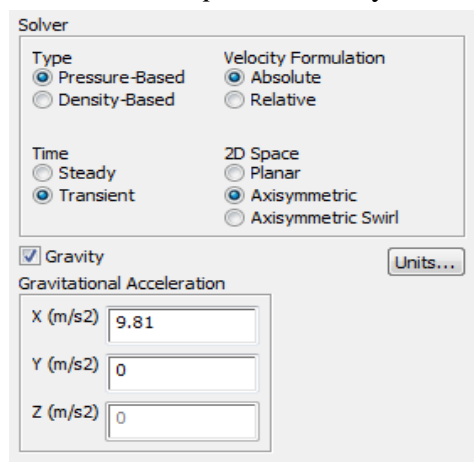


Figura A.5. Cuadro de diálogo de selección de parámetros generales de los casos de estudio.

También debemos seleccionar en Fluent el modelo del caso de estudio a resolver. En función de si estamos resolviendo el caso homogéneo o el caso de mezcla, la definición del modelo varía ligeramente. En la figura A.6, se observa la selección del modelo a resolver para cada caso de estudio. Accedemos a dicho menú mediante: *Define* → *Models*

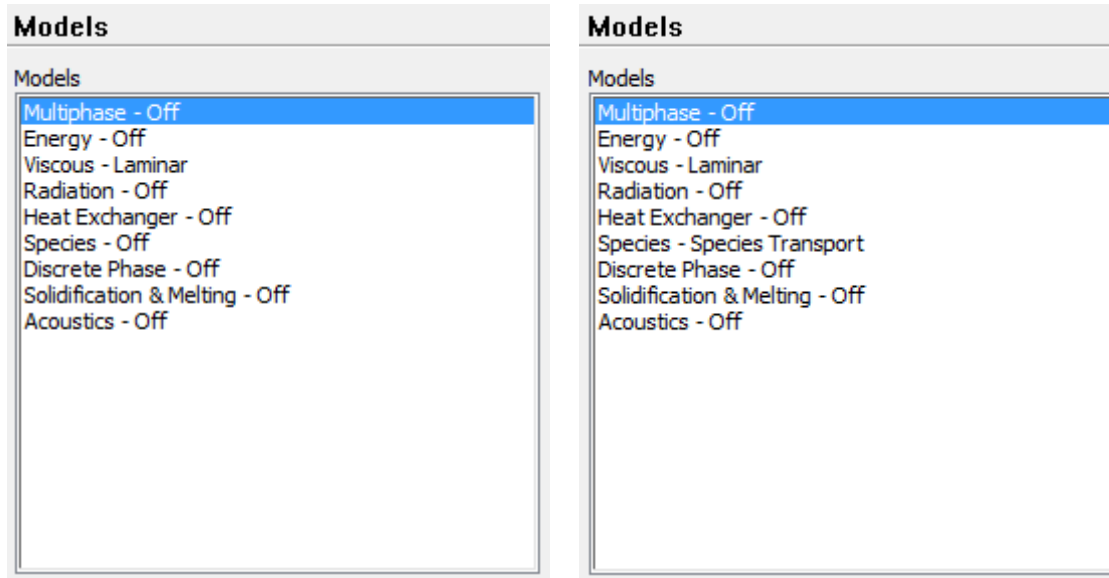


Figura A.6. Cuadro de diálogo de selección del modelo. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

Como se observa en la figura A.6, y de acuerdo a las características del problema definidas en el apartado 3.1, se ha definido en ambos casos de estudio un modelo de viscosidad laminar, debido al tipo de flujo de estudio que se ha definido como laminar, $Re = 2000$, donde las líneas de corriente son paralelas en todo momento. También hemos indicado en este cuadro de diálogo otras características del flujo, descartando en ambos casos: la existencia de fluidos en diferentes fases, la existencia de turbulencia, radiación y cualquier variación de temperatura, por lo que la ecuación de la energía tampoco se va a resolver.

En el caso homogéneo, de acuerdo con el apartado 3.2.1, no se ha definido un modelo de especies ya que se han definido en lugar de especies, escalares pasivos. En cambio, en el caso de mezcla, se ha definido un modelo de transporte de especies ("*Species Transport*") cuyas características se indican en la figura A.7.

Como se observa en la figura A.7, se ha elegido un perfil de mezcla ("*mixture-template*") de dos especies químicas distintas ("*Number of Volumetric Species*"), las cuales serán definidas de acuerdo a las características del Capítulo 2. Las propiedades de la interfase, así como de los fluidos implicados son definidas a continuación en el apartado A.3 y en el Anexo B.

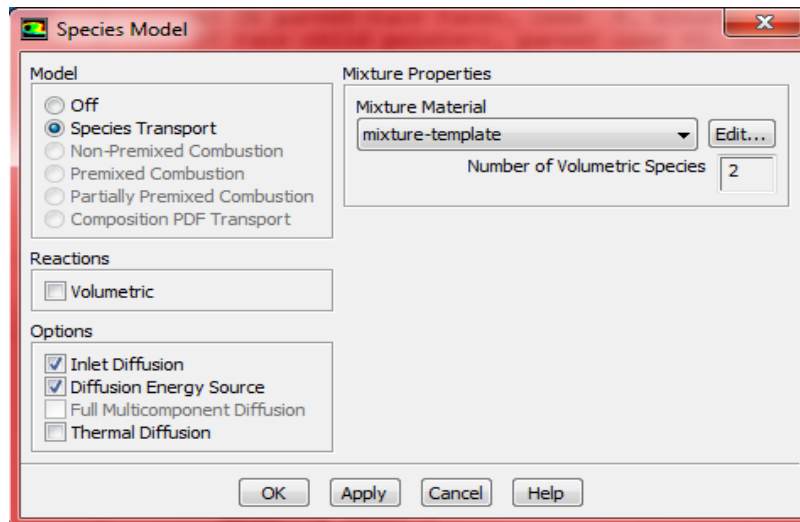


Figura A.7. Cuadro de diálogo de selección del modelo de especies.

A.3 Definición de los materiales implicados en el proyecto en Fluent.

En este apartado se especifican los materiales que intervienen en los casos de estudio y sus propiedades. Como se muestra en la figura A.8, dentro del menú: *Define* → *Materials*, podemos establecer los materiales utilizados para cada caso de estudio.

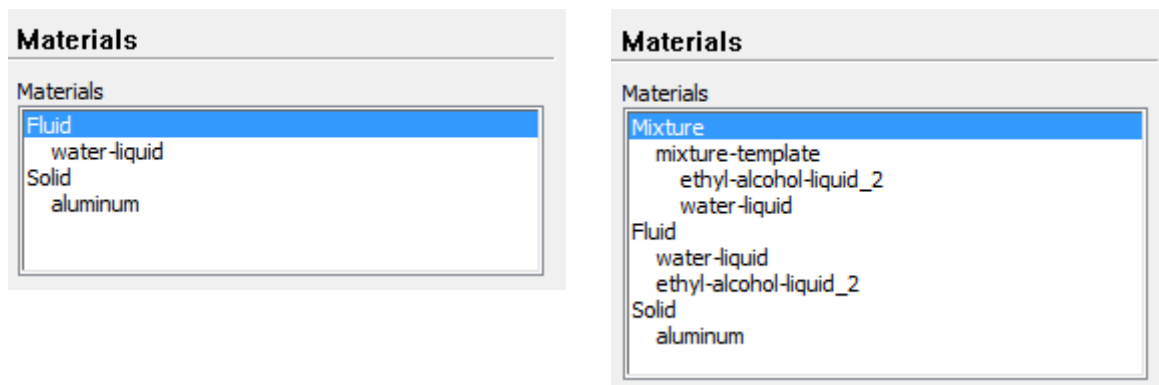


Figura A.8. Cuadro de diálogo de selección de los materiales de los casos de estudio. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

Debe notarse que en el caso de mezcla, como se observa en la figura A.8, al haberse definido un modelo de transporte de especies con perfil de mezcla, aparecen los componentes de la mezcla (“*Mixture*”) los cuales especificaremos más adelante.

En primer lugar vamos a describir el proceso a seguir para establecer los materiales implicados en el caso de estudio homogéneo y posteriormente abordaremos los casos de mezcla.

- **Caso de estudio homogéneo.**

Comenzamos definiendo en Fluent la cantidad de escalares pasivos introducidos y el valor de su difusividad, teniendo en cuenta que los valores ya fueron calculados en el *apartado 3.2.1*. Para ello accedemos al menú: *Define* → *User – Defined* → *Scalars*, donde indicamos el número de escalares pasivos (“*Number of User-Defined Scalars*”), como se muestra en la figura A.9.

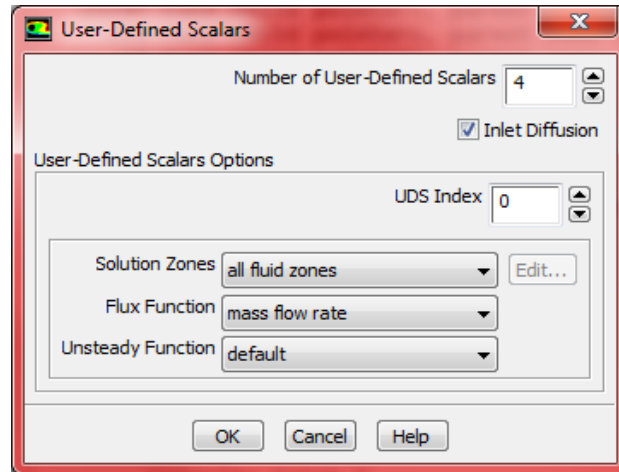


Figura A.9. Cuadro de diálogo de selección del número de escalares pasivos.

En la figura A.9, observamos que se han definido 4 escalares pasivos, por lo que se resolverá una ecuación por cada escalar.

Después de haber establecido el número de escalares pasivos debemos definir el material que se encuentra en el ambiente. Para ello, volviendo al cuadro de diálogo mostrado en la figura A.8, y haciendo doble clic sobre “*Fluid*”, accederemos al cuadro de diálogo de selección de propiedades del material, mostrado en la figura A.10.

Mediante el cuadro de diálogo mostrado en la figura A.10, podremos personalizar las propiedades del material contenido en el ambiente, o utilizar un material de la base de datos de Fluent con las propiedades predefinidas. En nuestro caso homogéneo, seleccionamos como único fluido el agua, y al utilizar escalares pasivos definimos también su difusividad seleccionando en el campo “*UDS Diffusivity*” el valor: “*defined-per-uds*” y haciendo clic en “*Edit*”. De tal forma que accedemos al cuadro de diálogo mostrado en la figura A.11.

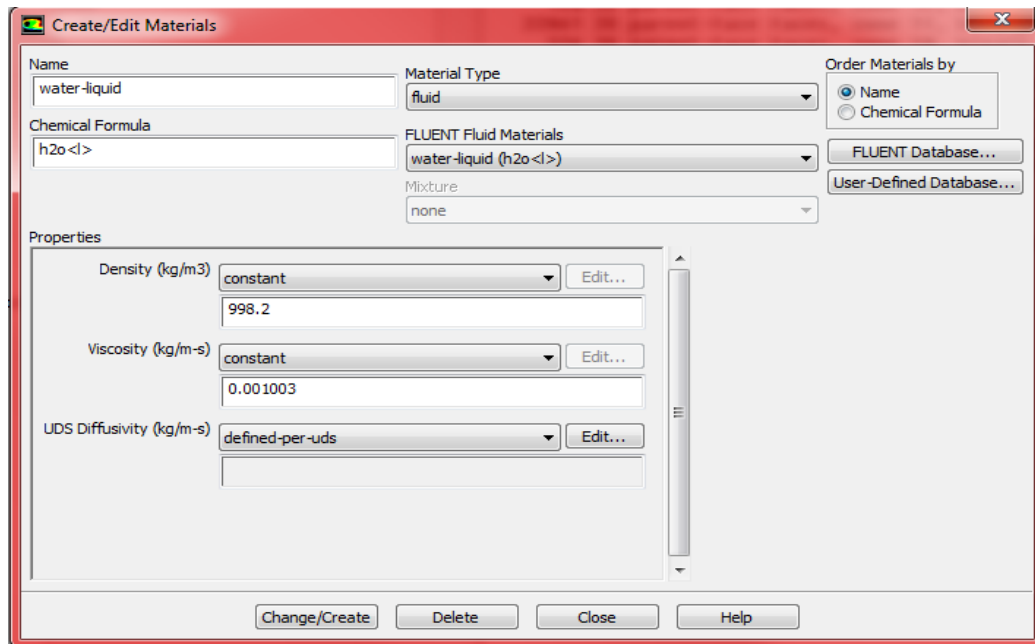


Figura A.10. Cuadro de diálogo de selección propiedades del ambiente. Caso homogéneo.

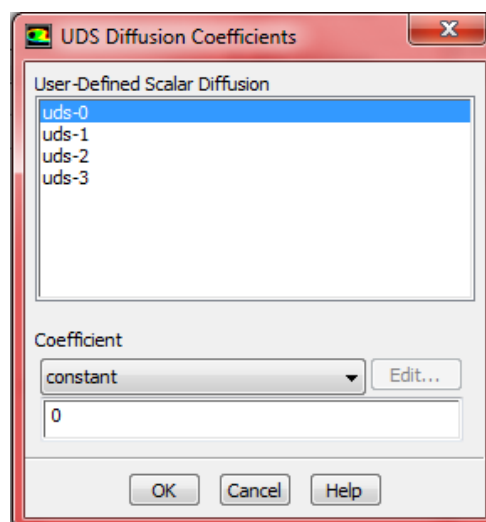


Figura A.11. Cuadro de diálogo de selección de la difusividad de los escalares pasivos.

Seleccionando cada uno de los 4 escalares pasivos definidos, introducimos el valor de la difusividad calculado en el apartado 3.2.1.

- Caso de estudio de mezcla.

A diferencia del caso homogéneo, en el caso de mezcla debemos definir las especies implicadas y sus propiedades, y además las propiedades que rigen la interfase entre ambas especies. Para ello, accedemos al cuadro de diálogo mostrado en la figura A.8. y haciendo

doble clic sobre “*Mixture*”, se muestra el cuadro de diálogo de selección de propiedades de la mezcla, mostrado en la figura A.12.

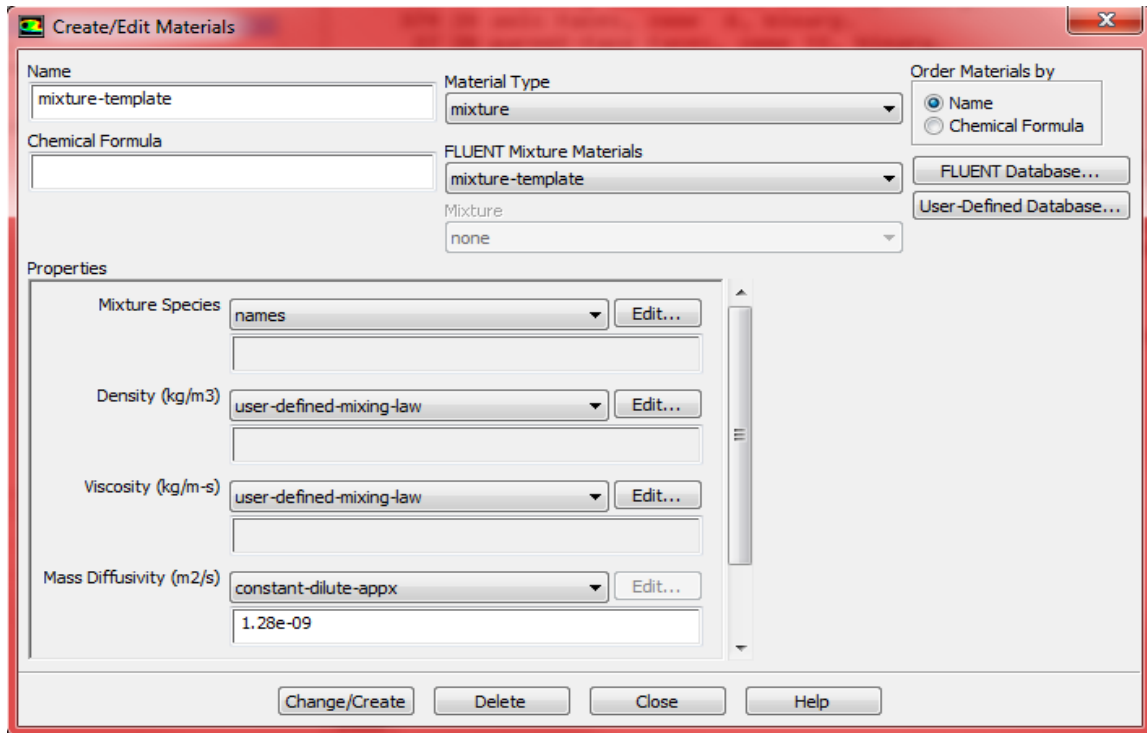


Figura A.12. Cuadro de diálogo de selección propiedades de la mezcla. Casos de mezcla.

En primer lugar deberemos introducir en nuestro caso de estudio los dos fluidos que componen la mezcla: agua líquida y alcohol etílico. Para ello accedemos a la base de datos de Fluent (“*FLUENT Database*”) y copiamos ambos fluidos.

Debido a que nuestro fluido ambiente tiene unos valores de densidad y viscosidad específicos para cada caso de estudio de mezcla (ver ecuaciones apartado 2.2.1), deberemos modificar los valores de las propiedades del alcohol etílico, por aquellos valores correspondientes a cada caso de mezcla. Para seleccionar las propiedades específicas del caso de mezcla considerado, seleccionamos en el cuadro de diálogo de la figura A.12, “*Material Type*” igual a “*fluid*”. A continuación, únicamente se deberán modificar los valores de la densidad y viscosidad del alcohol etílico, de acuerdo a los valores siguientes:

$$\rho_{Fr\ 10} = 993.0633 \left(\frac{kg}{m \cdot s} \right) \quad \mu_{Fr\ 10} = 0.0011284 \left(\frac{kg}{m \cdot s} \right) \quad (A.1)$$

$$\rho_{Fr\ 5} = 987.9266 \left(\frac{kg}{m \cdot s} \right) \quad \mu_{Fr\ 5} = 0.0012673 \left(\frac{kg}{m \cdot s} \right) \quad (A.2)$$

Una vez definidas las propiedades del fluido ambiente, vamos a seleccionar las especies que conforman la mezcla. Para ello, en el cuadro de diálogo mostrado en la figura A.12, en el

campo “*Mixture Species*” hacemos clic en el botón “*Edit*”, y seleccionamos las especies como se indica en la figura A.13.

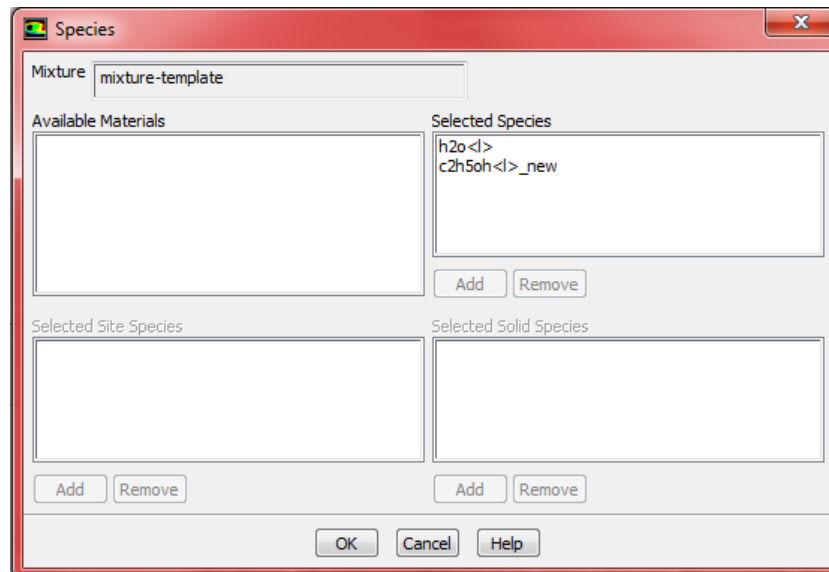


Figura A.13. Cuadro de diálogo de selección de especies de la mezcla. Casos de mezcla.

Por último, debemos indicar los valores de la densidad y viscosidad de la interfase. La forma de indicar el valor de la densidad y viscosidad en cada punto de la interfase fue descrito en el apartado 2.2.1, en función de la fracción másica de agua. La forma de indicar en el programa Fluent que la variación de ambas propiedades se realiza en función del código incluido mediante UDF, es definiendo el valor como: “*user-defined-mixing-law*”. La forma de interpretar el código en Fluent se describe en el Anexo E.

En cuanto al valor de la difusividad, se ha escogido un valor constante definido en el trabajo de C. Marugán *et al.* [21].

A.4 Definición de las condiciones de contorno en Fluent.

En primer lugar, vamos a definir las propiedades de la zona donde están definidas las celdas. Tal y como se ha creado la malla en ambos casos de estudio, las celdas se encuentran en una única zona llamada “*fluid*” como puede observarse en la figura A.14.

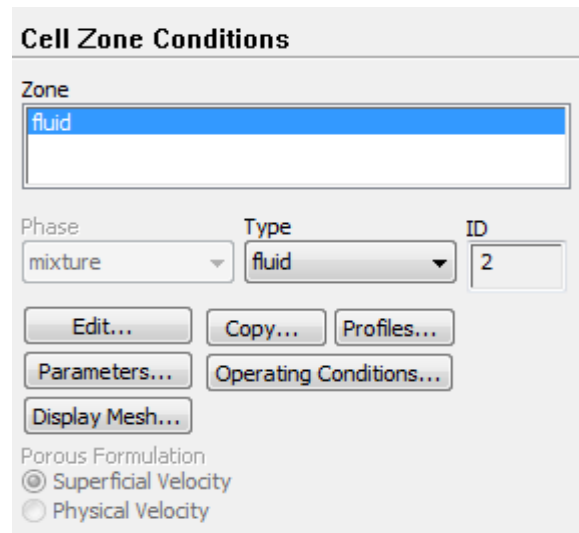


Figura A.14. Cuadro de diálogo de selección de propiedades de la zona de celdas.

Mediante el cuadro de diálogo de la figura A.14, haciendo clic en “*Edit*”, se define la zona de celdas “*fluid*”, que componen el ambiente, indicando la ausencia de poros y fuentes para todos los casos de estudio. Mediante el mismo cuadro de diálogo de la figura A.14, podemos seleccionar las condiciones de operación, iguales para todos los casos de estudio, haciendo clic sobre “*Operating Conditions*”. La figura A.15, muestra las condiciones de operación, donde se ha seleccionado que la presión de referencia es igual a la presión atmosférica, localizada en el punto más alejado del dominio. Al mismo tiempo, se ha seleccionado el valor y la dirección en la que actúa la aceleración de la gravedad.

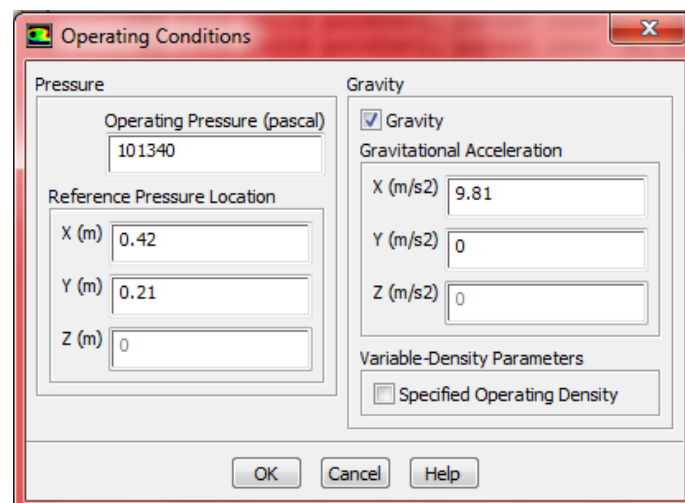


Figura A.15. Cuadro de diálogo de selección de condiciones de operación.

Una vez definidas las condiciones de operación, vamos a seleccionar las condiciones de contorno, teniendo en cuenta que como la malla es inicialmente la misma para todos los casos de estudio, las zonas donde se definen las condiciones de contorno son las mismas. Para poder modificar las condiciones de contorno en función del caso de estudio en que nos encontremos, debemos acceder al menú: *Define* → *Boundary Condition*, mostrándose el cuadro de diálogo de la figura A.16.

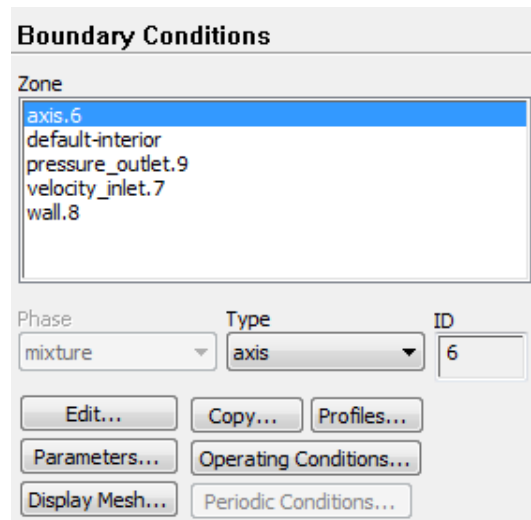


Figura A.16. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. General.

A continuación se relaciona cada zona definida en la figura A.16 con su equivalente en las zonas del dominio indicadas gráficamente en la figura 3.1.1, dentro del apartado 3.1.2. Al mismo tiempo se describe el tipo de zona que se debe definir para cada una dentro del desplegable “Type”:

- Axis.6: Eje de simetría. *Type: axis.*
- Default-interior: Ambiente. *Type: interior.*
- Pressure_outlet.9: Contornos libres. *Type: pressure.outlet.*
- Velocity_inlet.7: Orificio de entrada. *Type: velocity-inlet.*
- Wall.8: Pared vertical zona de entrada. *Type: wall.*

Las zonas del eje de simetría y el ambiente, carecen de más parámetros que modificar, por lo que a continuación nos centraremos en el resto de zonas.

- **Pared vertical zona de entrada (Wall).**

Seleccionando esta zona y haciendo clic sobre el botón “Edit” observamos el cuadro de diálogo de la figura A.17.

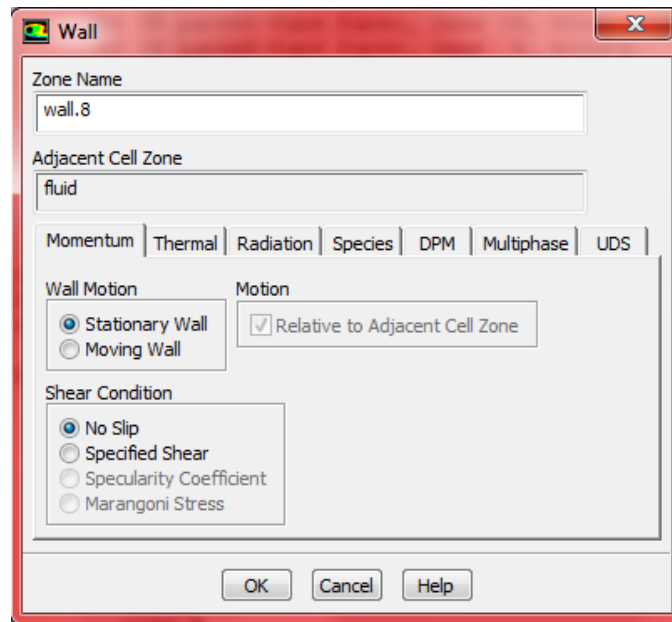


Figura A.17. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Momento en pared vertical.

Como se observa en la figura A.17, se selecciona un tipo de pared fija “*Stationary Wall*”, y sin deslizamiento entre pared y fluido, o lo que es lo mismo, sin que exista una velocidad relativa entre ambos, “*No Slip*”. Estos valores son los mismos para todos los casos de estudio, sin embargo, en función de si estamos definiendo un caso homogéneo o un caso de mezcla, las pestañas “*UDS*” y “*Species*”, serán configurables o no respectivamente.

A continuación se muestra en la figura A.18, la pestaña “*UDS*” para el caso homogéneo, donde se define como condición un flujo nulo de los escalares a través del muro.

En la figura A.19, se puede observar que en la pestaña “*Species*” para los casos de mezcla se define un flujo nulo del fluido del chorro a través de la pared.

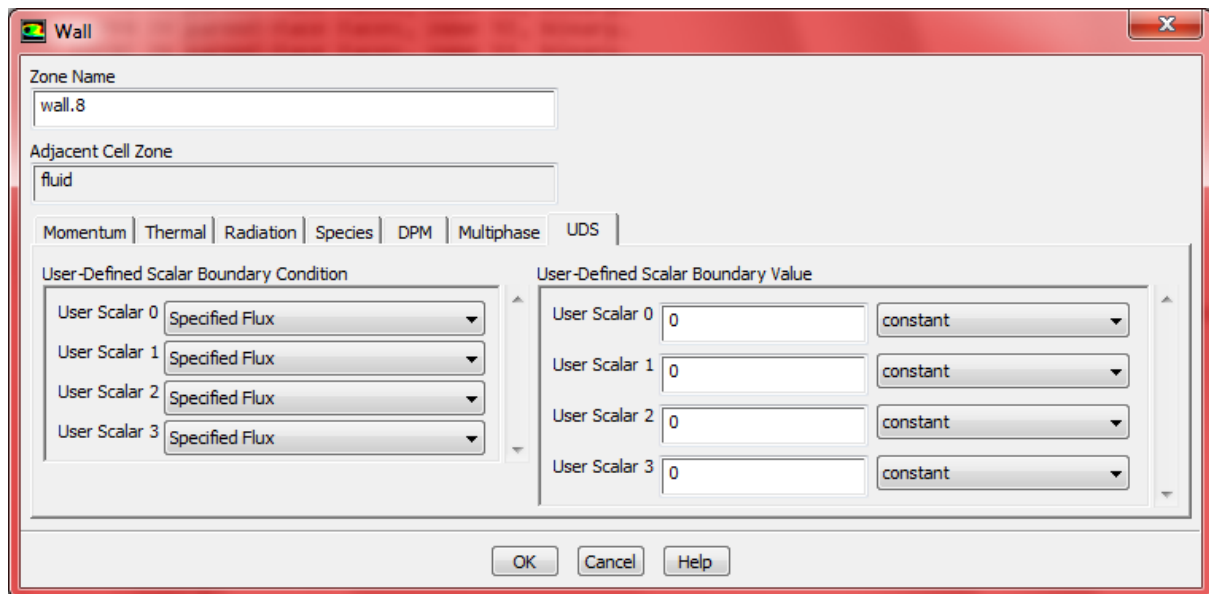


Figura A.18. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. UDS en pared vertical. Caso homogéneo.

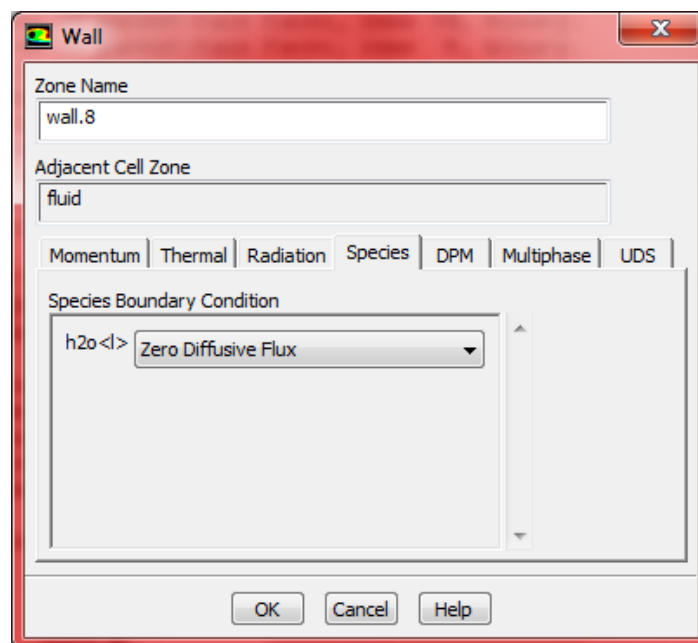


Figura A.19. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Species en pared vertical. Casos de mezcla.

- Contornos libres (Pressure-Outlet).

Especificamos las características de los contornos libres, mediante el cuadro de diálogo mostrado en la figura A.20, al que se accede seleccionando la zona “*pressure-outlet*” y haciendo clic en “*Edit*”.

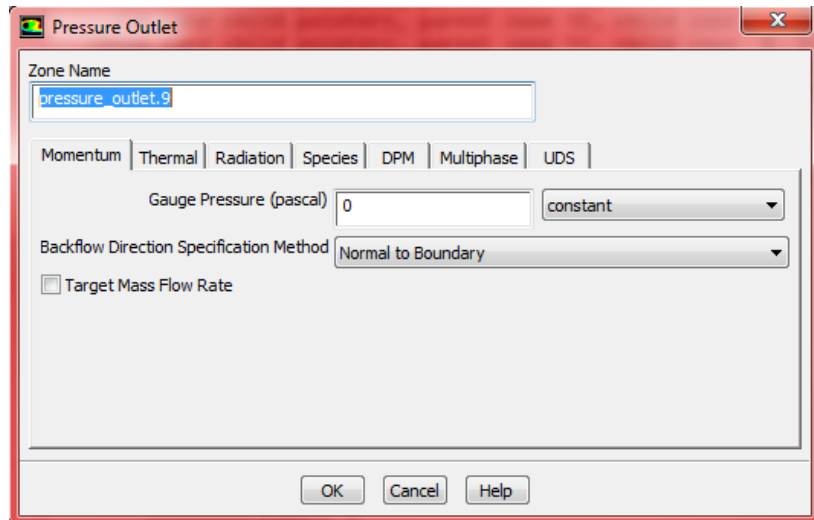


Figura A.20. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Momento en contornos libres.

En el cuadro de diálogo de la figura A.20 se muestran las condiciones especificadas sobre la pestaña “*Momentum*” que es igual para todos los casos de estudio. Se ha definido el valor de la presión relativa a la presión de operación (“*Gauge Pressure*”), como cero, lo cual implica que la presión en los contornos libres es igual a la presión de operación, definida anteriormente como presión atmosférica.

Al igual que sucede en las condiciones sobre la pared vertical, en las pestañas “*UDS*” y “*Species*” se define como nulo el flujo de escalares pasivos, o fluido del chorro, respectivamente, a través de los contornos libres.

- **Orificio de entrada (Velocity-inlet).**

A continuación definimos las condiciones de contorno en el orificio de entrada.

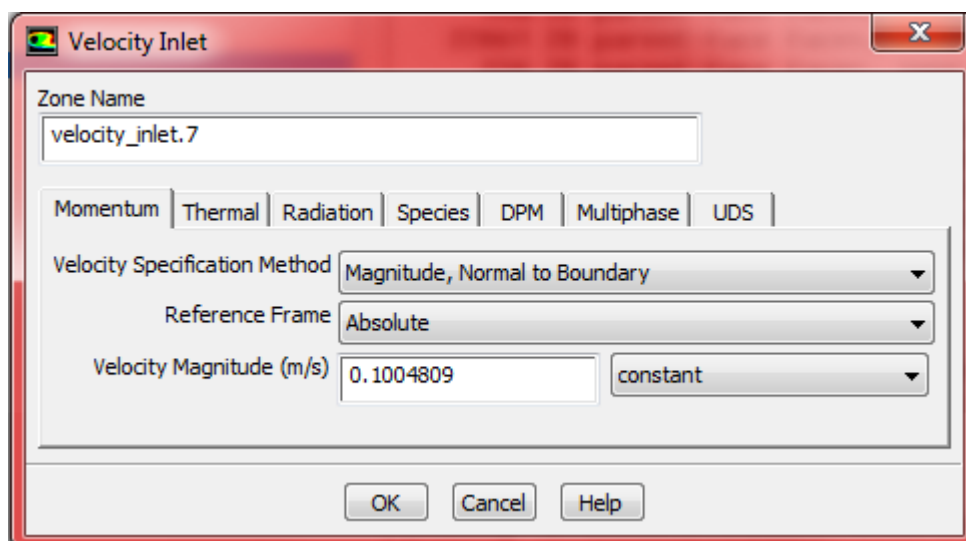


Figura A.21. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Momento en orificio de entrada.

Las condiciones de entrada, definidas en la figura A.21, referidas a la pestaña “*Momentum*” son las mismas en todos los casos de estudio, debido a que el valor del número de Reynolds es $Re = 2000$ en todos ellos, y el fluido que se introduce es agua. La velocidad del chorro de agua a la entrada viene definida por la ecuación (2.2.4) dentro del apartado 2.2.

En función del caso de estudio que estemos definiendo, caso homogéneo o casos de mezcla, las pestañas “*UDS*” o “*Species*”, respectivamente, serán ser configurables. En el caso homogéneo, como se observa en la figura A.22, definimos un valor constante e igual a 1 para la fracción másica de los escalares pasivos, indicando de esta forma que es el punto de entrada.

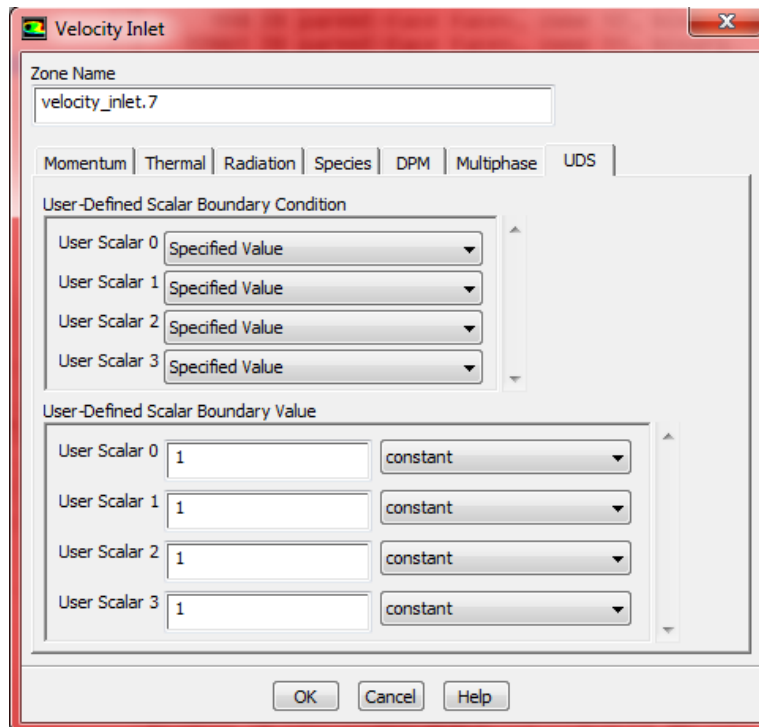


Figura A.22. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. UDS en orificio de entrada. Caso homogéneo.

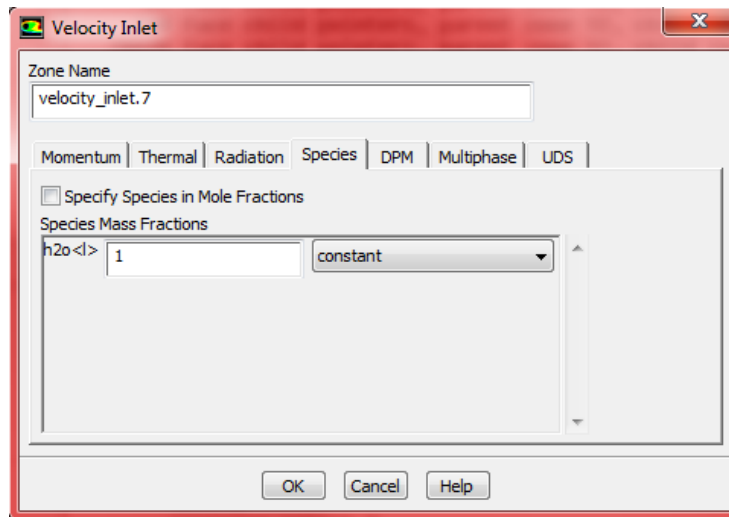


Figura A.23. Cuadro de diálogo de selección de las condiciones de frontera. Species en orificio de entrada. Casos de mezcla.

En la figura A.23, se especifica para los casos de mezcla, el valor constante e igual a 1, de la fracción másica de chorro de agua en el orificio de entrada.

Finalmente, antes de llevar a cabo la resolución numérica de los casos de estudio, debemos fijar unos valores de referencia que Fluent va a tomar para resolver las ecuaciones. Para ello, en el menú: *Report* → *Reference Values*, seleccionamos los valores como se muestran en la figura A.24, observando que están relacionados con el fluido ambiente de cada caso de estudio.

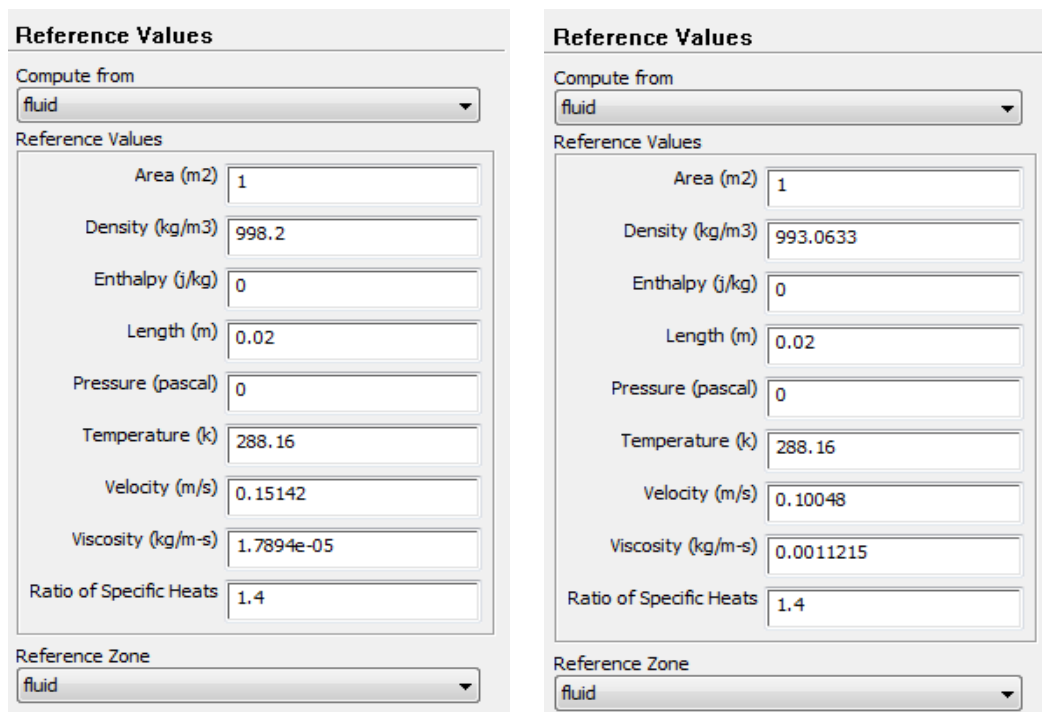


Figura A.24. Cuadro de diálogo de selección de los valores de referencia. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

A.5 Resolución numérica de los casos de estudio en Fluent.

Una vez hemos configurado las características de los diferentes casos de estudio, debemos establecer una serie de parámetros relacionados con la resolución numérica de los mismos.

En primer lugar seleccionamos el método de resolución en el menú: *Solve* → *Method*. En la figura A.25, se muestra en primer lugar el tipo de resolución numérica: PISO (“*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*”), el cual se recomienda para flujos transitorios con intervalos de tiempo grandes. Se usará la misma configuración para todos los casos de estudio.

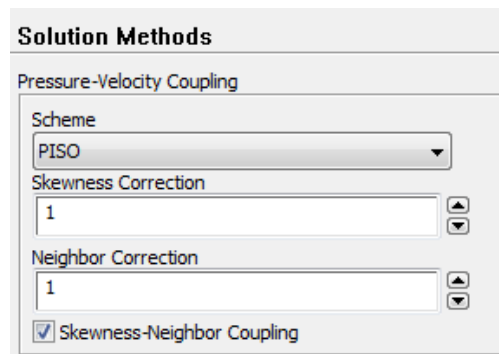


Figura A.25. Cuadro de diálogo de selección del tipo de resolución.

En segundo lugar, debemos definir en Fluent el método a utilizar para discretizar el término convectivo en las ecuaciones. En la figura A.26, se muestran las discretizaciones escogidas para cada caso de estudio.

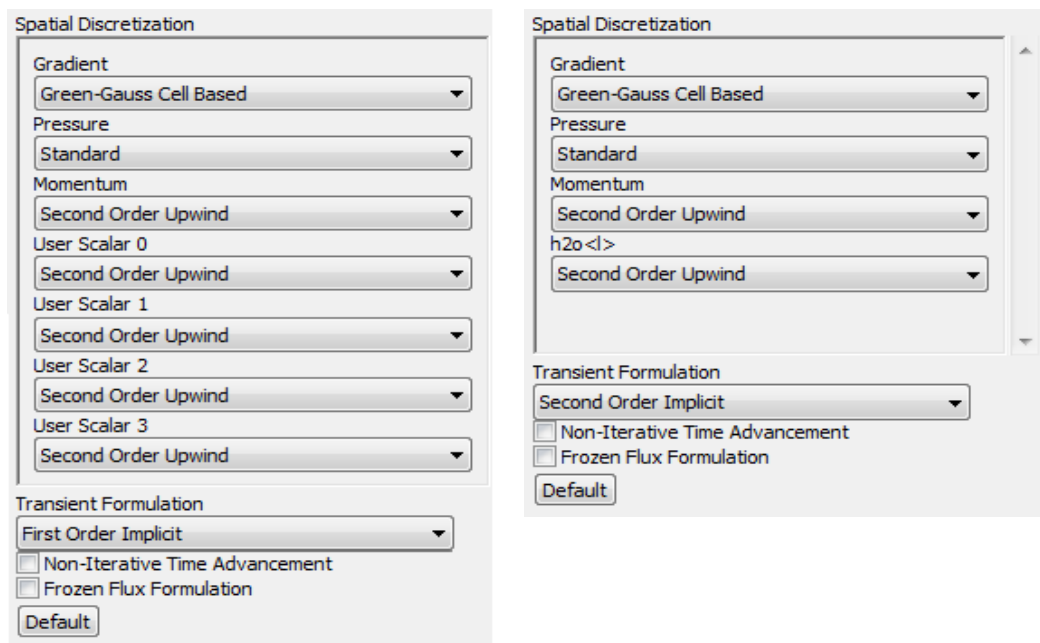


Figura A.26. Cuadro de diálogo de selección de la discretización espacial. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

A continuación debemos seleccionar los parámetros del control de la solución para cada caso de estudio, “*Under-Relaxation Factors*”, dentro del menú: *Solve* → *Controls*. En la figura A.27, se indican los valores seleccionados para cada caso de estudio, teniendo en cuenta que un valor próximo a cero indica una menor importancia relativa a las soluciones de las iteraciones anteriores, siendo lo contrario un valor próximo a uno.

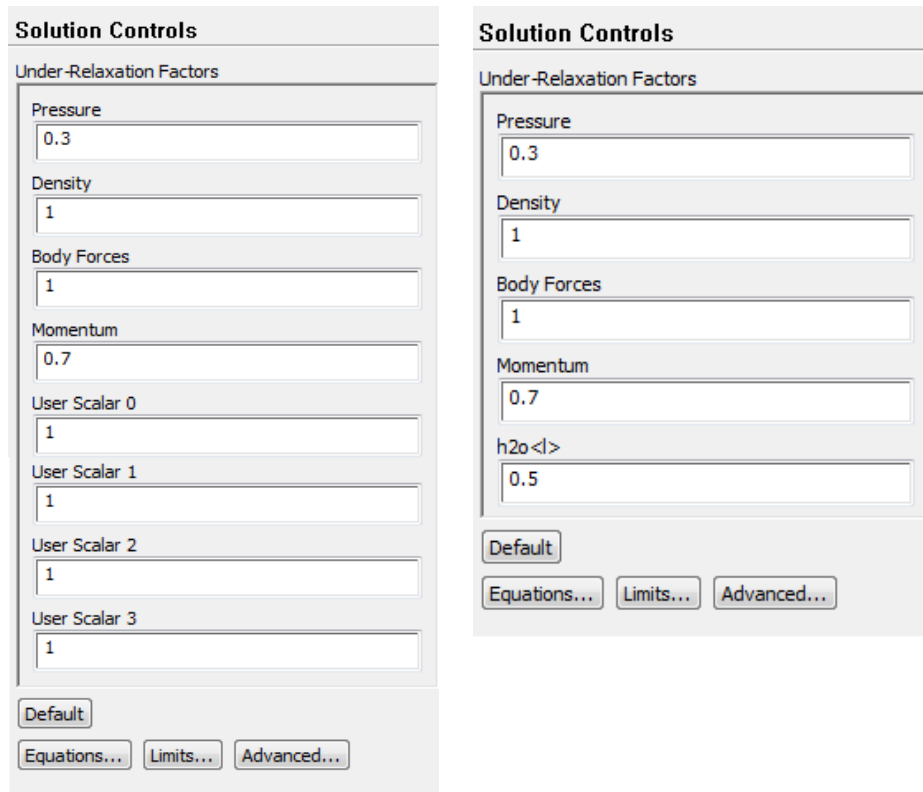


Figura A.27. Cuadro de diálogo de selección de los parámetros de sobrerrelajación. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

Haciendo clic sobre “*Limits*” en el cuadro de diálogo de la figura A.27, podemos establecer los valores límite entre los que se encuentra la presión, teniendo de esta forma un control de la solución. En la figura A.28, se muestran los límites escogidos para todos los casos de estudio.

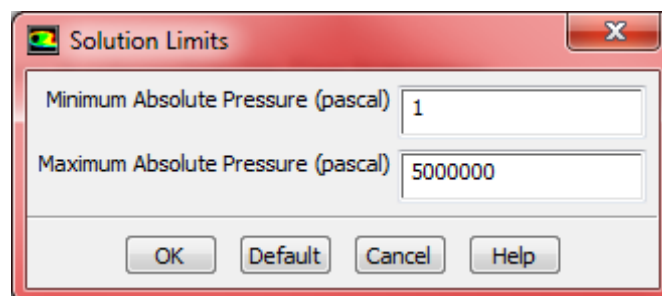


Figura A.28. Cuadro de diálogo de selección de los límites de la solución.

Antes de comenzar a ejecutar la resolución del problema debemos inicializar todas las variables con unos valores a partir de los cuales Fluent comience a resolver las ecuaciones. Entrando en el menú: *Solve* → *Initialization*, se seleccionan estos valores iguales a cero en todos los casos de estudio.

Finalmente, seleccionamos los últimos parámetros necesarios antes de comenzar la simulación dentro del menú: *Solve* → *Run Calculation*.

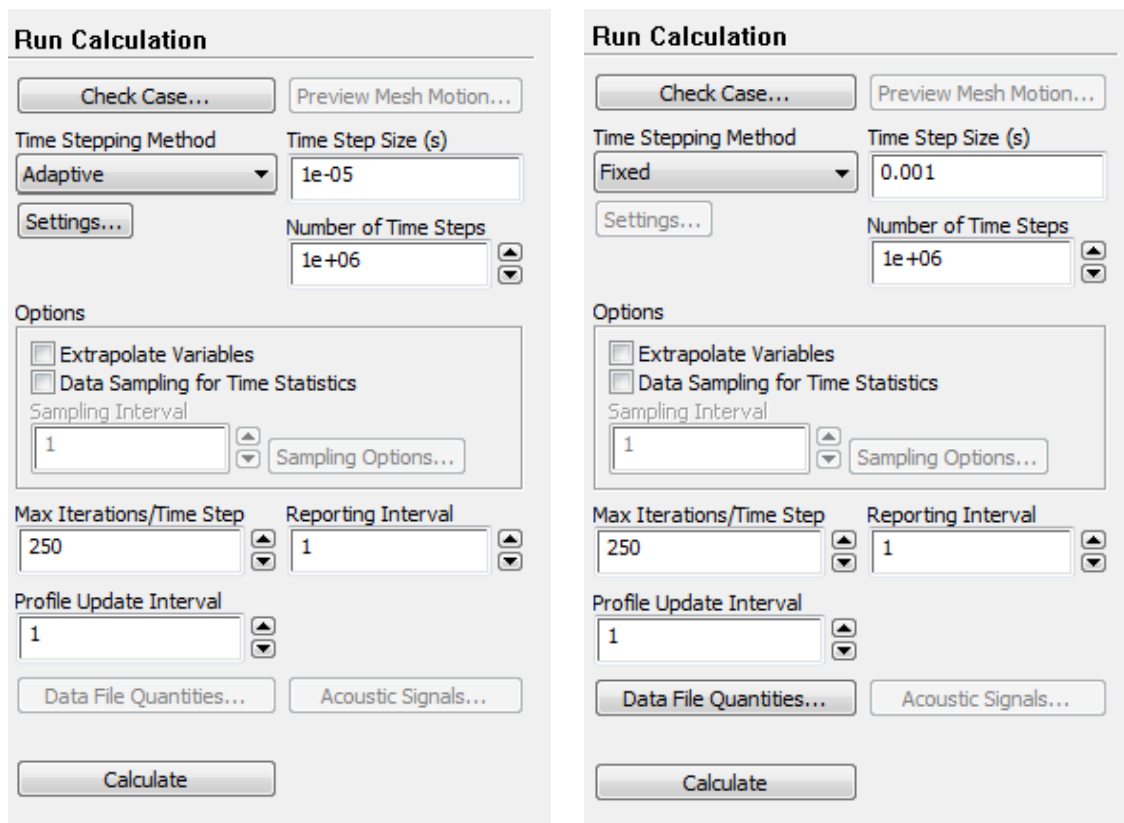


Figura A.29. Cuadro de diálogo de selección de los parámetros temporales de la resolución. Caso homogéneo (izquierda) y Casos de mezcla (derecha).

Finalmente se indica la configuración elegida para definir el paso de tiempo adaptativo, únicamente en el caso homogéneo, de forma que el paso de tiempo se adapte a las condiciones del problema y converja más rápidamente.

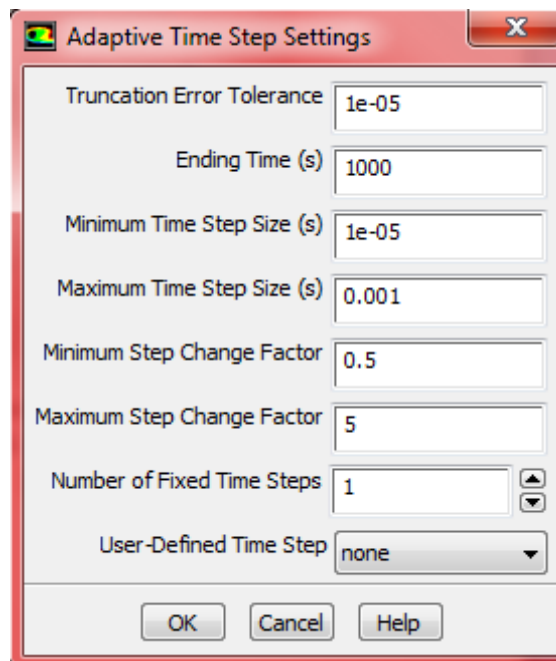


Figura A.30. Cuadro de diálogo de selección de los parámetros del tiempo adaptativo. Caso homogéneo.

Anexo B. Tabla de propiedades de la mezcla.

En este apartado se muestra la tabla de propiedades de la disolución de alcohol etílico en agua a 20 °C, obtenida de [22].

Y_A [%]	ρ [g/cm ³]	μ [mPa.s]	Y_A [%]	ρ [g/cm ³]	μ [mPa.s]
0,5	0,9973	1,023	30	0,9539	2,667
1	0,9963	1,046	32	0,9504	2,726
2	0,9945	1,095	34	0,9468	2,768
3	0,9927	1,140	36	0,9431	2,803
4	0,9910	1,183	38	0,9392	2,829
5	0,9893	1,228	40	0,9352	2,846
6	0,9878	1,279	42	0,9311	2,852
7	0,9862	1,331	44	0,9269	2,850
8	0,9847	1,385	46	0,9227	2,843
9	0,9833	1,442	48	0,9183	2,832
10	0,9819	1,501	50	0,9139	2,813
12	0,9792	1,627	60	0,8911	2,547
14	0,9765	1,761	70	0,8676	2,214
16	0,9739	1,890	80	0,8436	1,881
18	0,9713	2,019	90	0,8180	1,542
20	0,9687	2,142	92	0,8125	1,475
22	0,9660	2,259	94	0,8070	1,407
24	0,9632	2,370	96	0,8013	1,342
26	0,9602	2,476	98	0,7954	1,273
28	0,9571	2,581	100	0,7893	1,203

Anexo C. Gráficos de resultados en Fluent.

C.1 Vorticidad. Caso homogéneo.

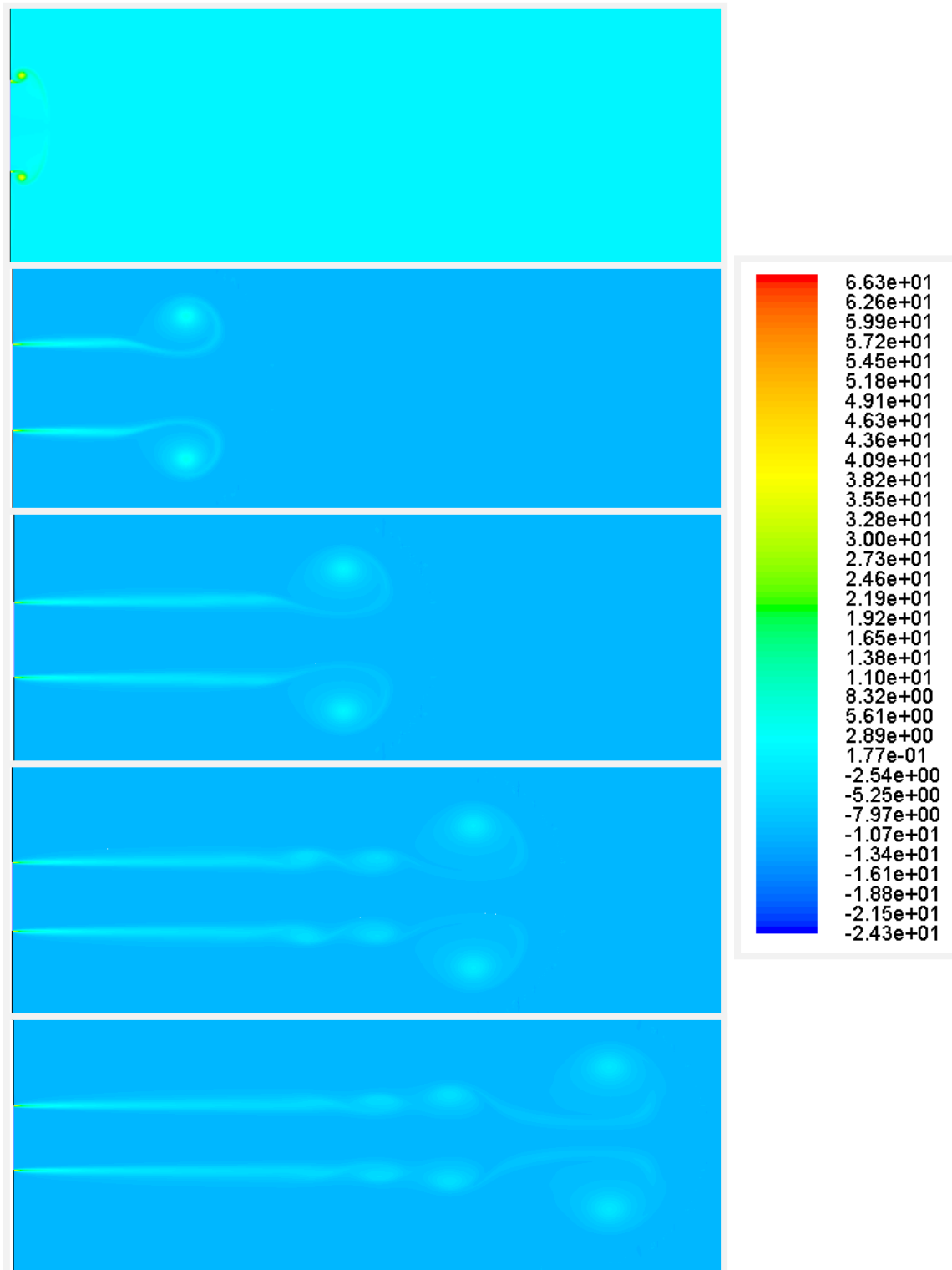


Figura C.1. Evolución de la vorticidad adimensional en el caso homogéneo para los tiempos adimensionales 0.538, 5.473, 10.524, 15.514 y 20.080 respectivamente.

C.2 Vorticidad. Caso de flotabilidad negativa $Fr = 10$.

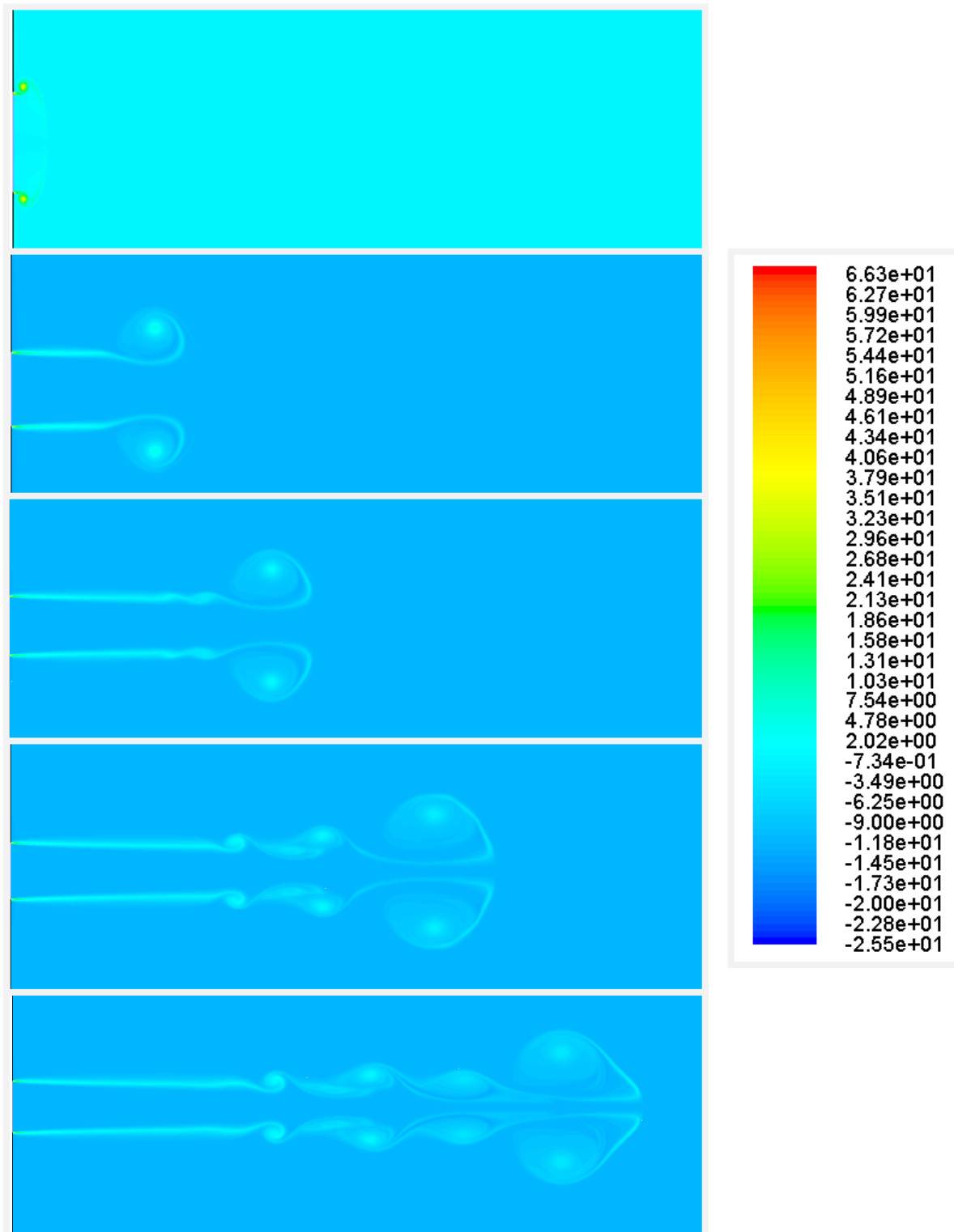


Figura C.2. Evolución de la vorticidad adimensional en el caso de flotabilidad negativa $Fr = 10$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.526, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.

C.3 Vorticidad. Caso de flotabilidad negativa $Fr = 5$.

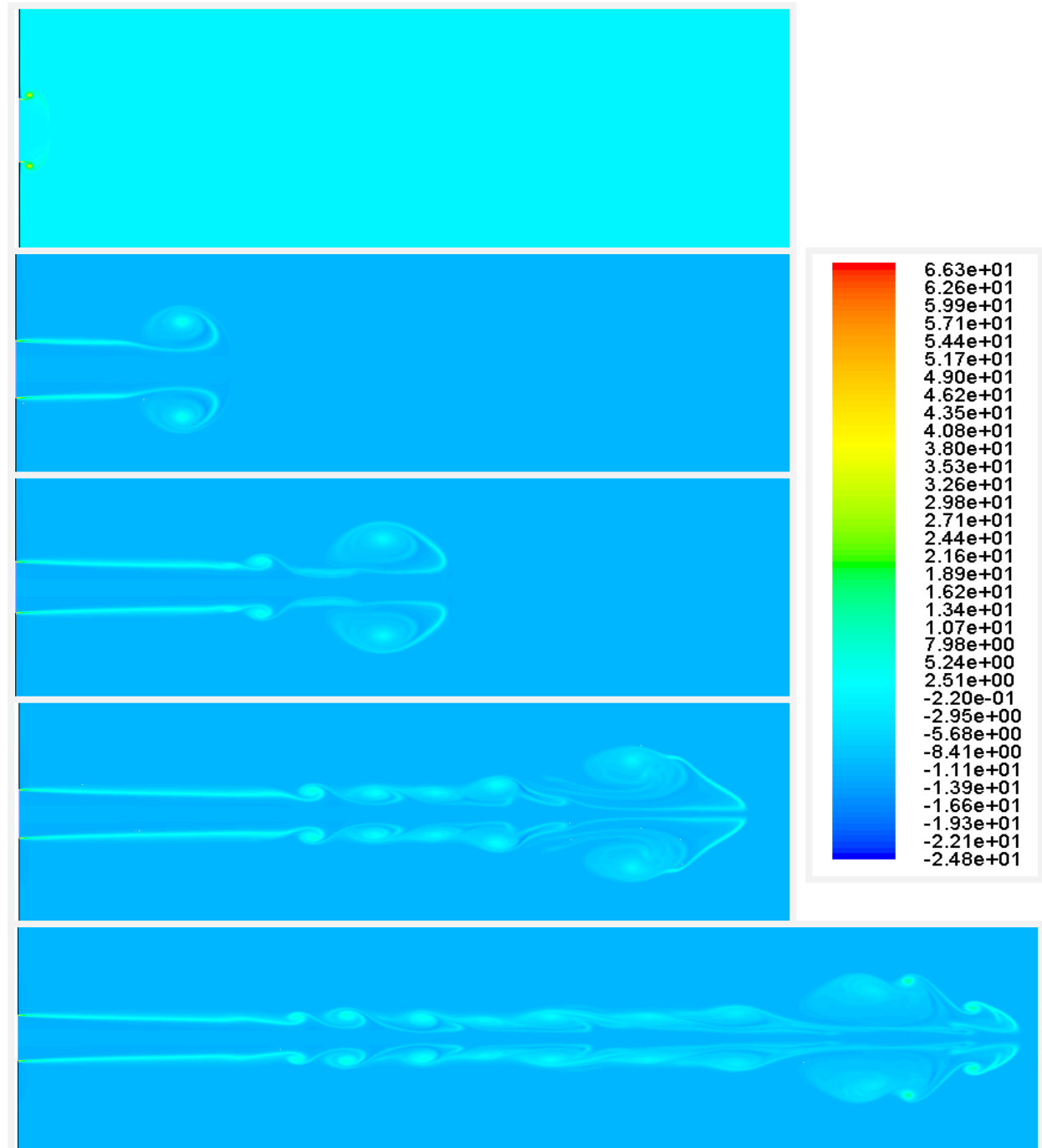


Figura C.3. Evolución de la vorticidad adimensional en el caso de flotabilidad negativa $Fr = 5$ para los tiempos adimensionales 0.502, 5.501, 10.550, 15.574 y 20.096 respectivamente.

Anexo D. Validez de los resultados: Caso homogéneo.

En este apartado evaluamos la fiabilidad de los resultados obtenidos en el caso homogéneo, debido a que es el único de los casos de estudio realizados en el presente proyecto que se ha llevado a cabo con anterioridad. Para ello utilizaremos los resultados obtenidos en el Proyecto Fin de Carrera de Víctor Manuel Gómez [20].

A continuación representamos los gráficos comunes en ambos proyectos. Debe tenerse en cuenta, que se está buscando mostrar la fiabilidad de los resultados obtenidos a partir del post-procesado de los datos realizado en cada Proyecto Fin de Carrera, lo cual condiciona el análisis al valor de las condiciones de contorno introducidas en cada Proyecto. En base a lo descrito anteriormente debe indicarse que el caso de estudio homogéneo de [20], fue realizado con un número de Reynolds, $Re = 1000$, lo cual se tiene en cuenta en el análisis de ambos proyectos.

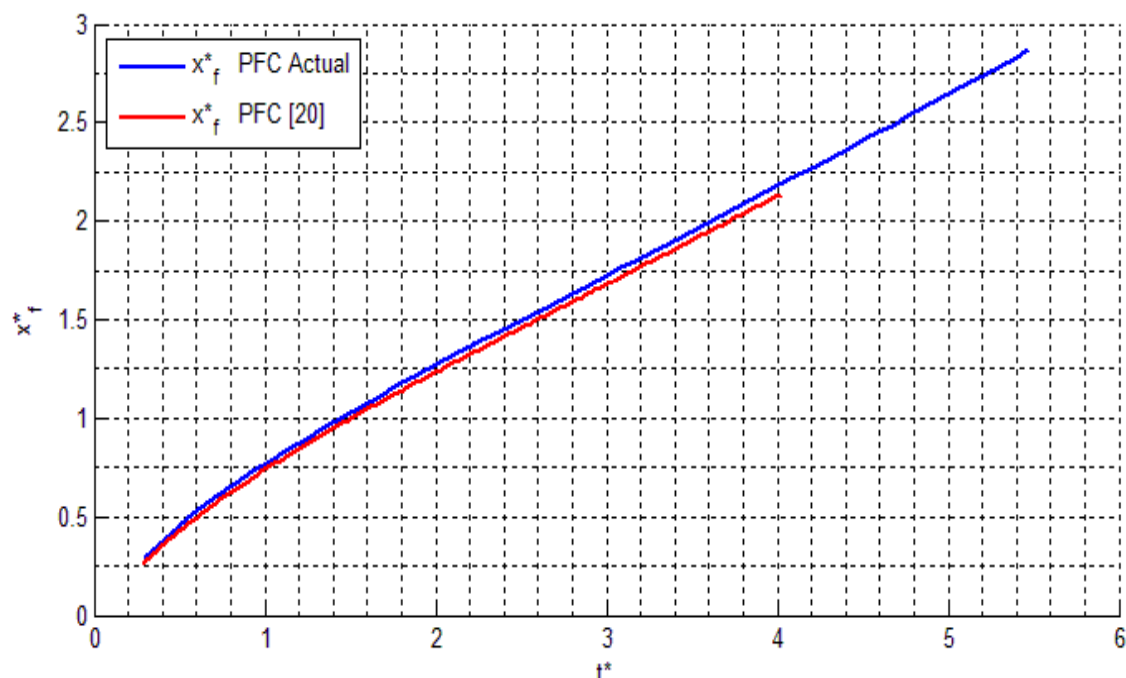


Figura D.1. Evolución temporal de la posición del frente del chorro adimensionalizada. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.

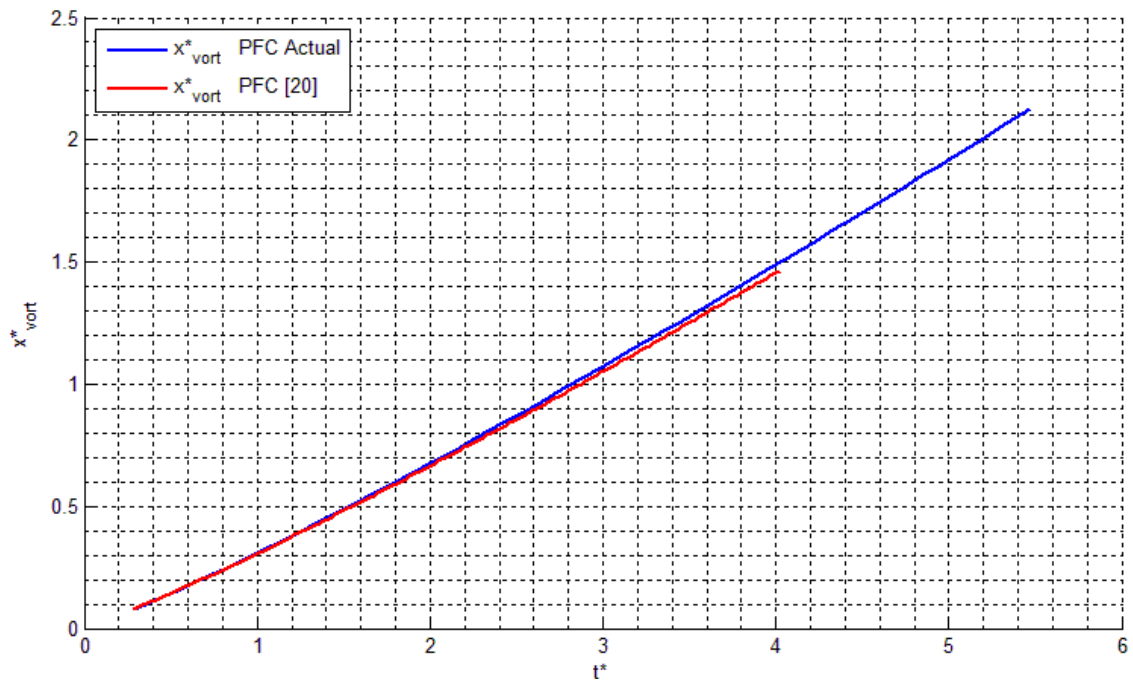


Figura D.2. Evolución temporal de la coordenada axial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.

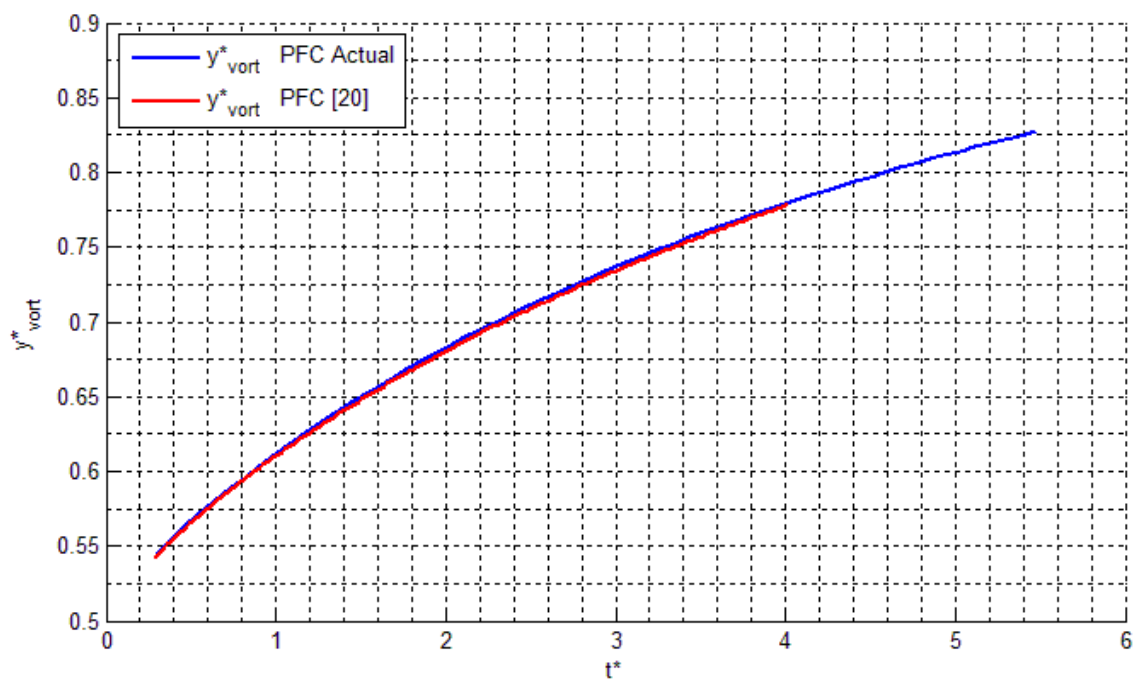


Figura D.3. Evolución temporal de la coordenada radial adimensionalizada del centro del vórtice de cabeza. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.

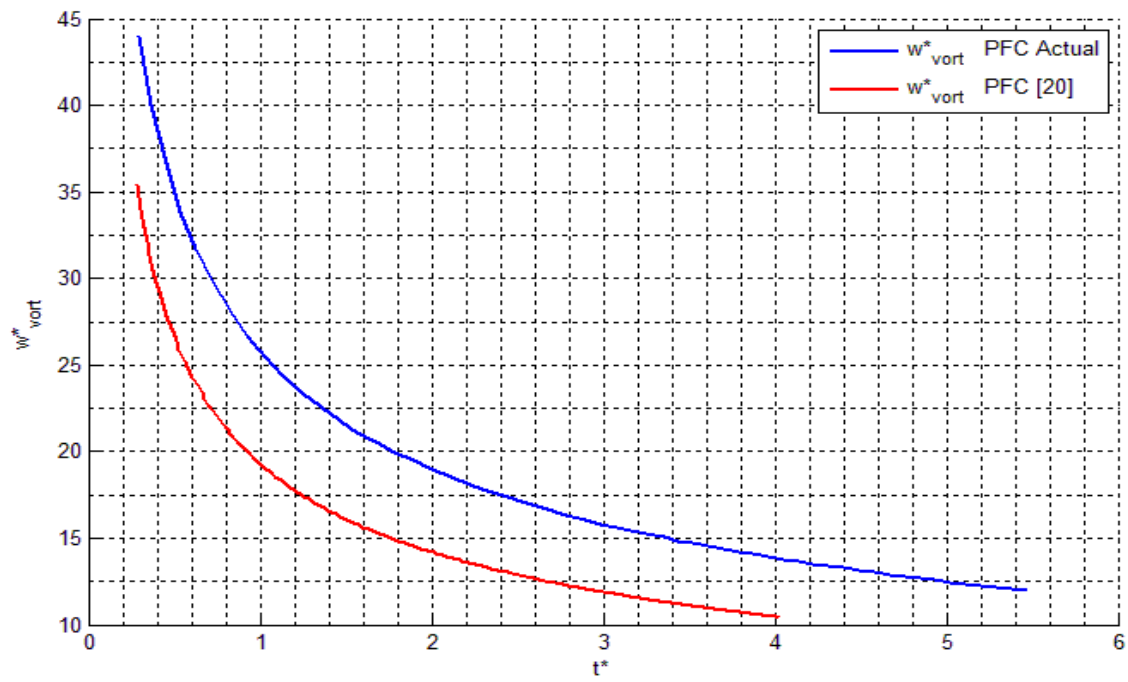


Figura D.4. Evolución temporal de la vorticidad adimensional del centro del vórtice de cabeza. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.

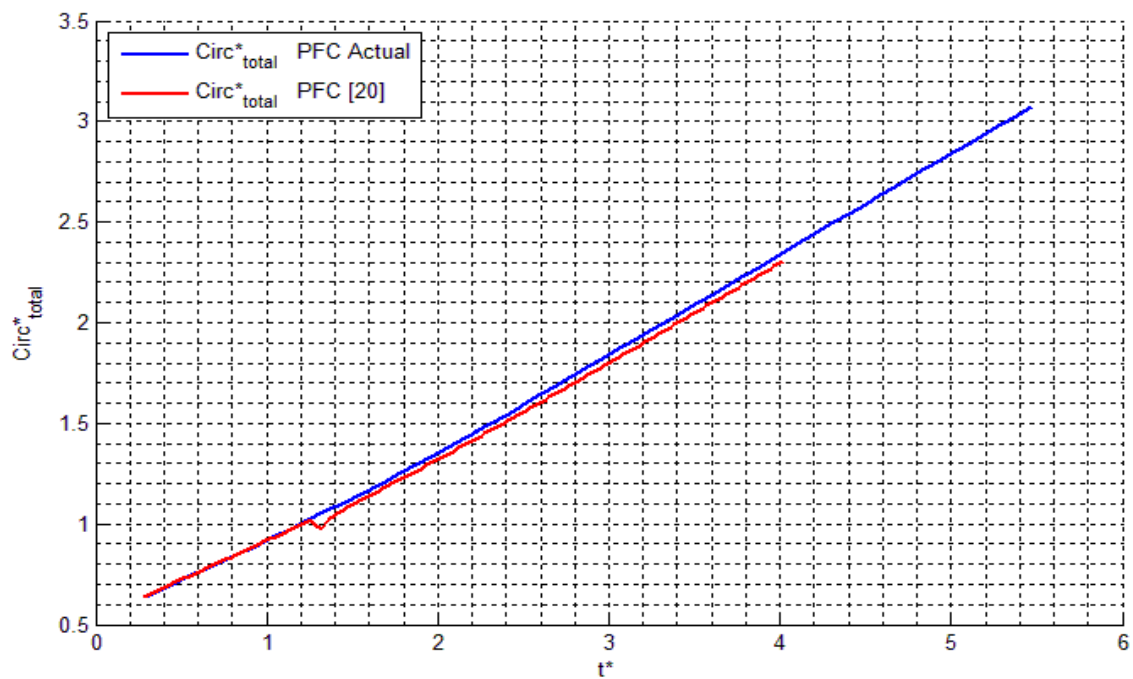


Figura D.5. Evolución temporal de la circulación adimensional total. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.

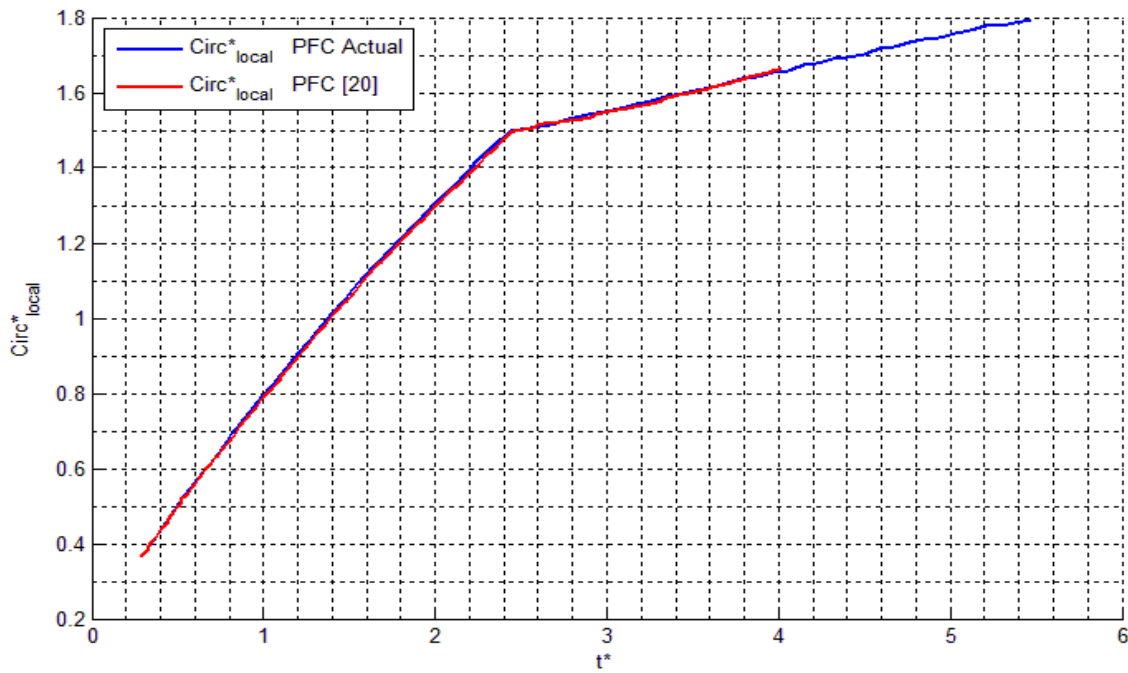


Figura D.6. Evolución temporal de la circulación adimensional local. Caso homogéneo. Análisis de fiabilidad.

Como se deduce de las gráficas, los resultados obtenidos para el caso de estudio homogéneo son fiables, teniendo en cuenta que en ambos proyectos el comportamiento de las curvas es el esperado.

La diferencia en las condiciones de contorno, y en concreto en el número de Reynolds son apreciables y están dentro de lo esperado de acuerdo al Proyecto [18], donde se muestra la influencia del número de Reynolds en los parámetros de estudio.

Debe indicarse que para obtener los datos de la figura D.6, se ha utilizado el mismo método de obtención que en [20], para de esta forma poder compararlos. Esta gráfica no coincide con la presentada en la resolución de este proyecto en el *apartado 4.5*, al estar representando parámetros distintos, puesto que el método de cálculo utilizado en la figura D.6, describe la circulación local en un entorno del vórtice principal de cabeza.

Anexo E. Códigos UDF. Programación en lenguaje C.

A continuación vamos a mostrar el código en lenguaje de programación C, interpretable por Fluent. Debido a la extensa longitud del código, se incluirán los bloques más relevantes del mismo. El código completo se incluye en el CD adjunto con el presente proyecto, también se indica al lector la disponibilidad de códigos similares en [11], [19] y [20].

En el archivo de código correspondiente al caso homogéneo (“casos_agua_agua_CENTRO.c”) encontramos las siguientes funciones:

- get_neighbour_cell
- get_edge_cell
- on_demand_centro
- on_demand_Energy
- on_demand_vel_frente

En los archivos de código correspondientes a los casos de mezcla (“caso_mezcla_especies_Fr_5.c”) y (“caso_mezcla_especies_Fr_10.c”) encontramos las siguientes funciones:

- mixture_density
- mixture_viscosity
- get_neighbour_cell
- get_edge_cell
- on_demand_centro
- on_demand_Energy
- on_demand_vel_frente

Como se puede observar, tanto el caso de estudio homogéneo, como los casos de estudio de mezcla hacen uso de la misma lógica de programación, utilizando las mismas funciones pero adaptadas al cálculo sobre escalares pasivos en el caso homogéneo, o sobre especies distintas como ocurre en los casos de mezcla.

A continuación mostramos parte de los códigos utilizados, de donde se puede extraer la lógica de programación. Funciones como get_neighbour_cell, get_edge_cell y on_demand_centro, han sido ampliamente objeto de estudio en otros Proyectos como [11], [19] y [20], por lo que únicamente se hace referencia a ellos, ya que las modificaciones realizadas en el presente proyecto sobre dichos códigos se basa principalmente en la distinción entre escalares pasivos y especies, en cada caso de estudio respectivamente.

En primer lugar vamos a mostrar cómo se han definido las propiedades de la mezcla en los casos de flotabilidad negativa. Con el fin de mostrar la lógica utilizada en cada uno de los dos casos de estudio de mezcla distintos, se incluye a continuación el código “mixture_density” del caso de estudio con número de Froude, $Fr = 10$, y el código “mixture_viscosity” del caso de estudio con número de Froude, $Fr = 5$.

DEFINE_PROPERTY(mixture_density,cell,thread)

```

{
  int i = 0; /*species index*/
  real Y;
  real rho;
  real rho_e = 789.3; /*ethyl alcohol*/
  real rho_j = 998.2;
  real Xwm = 0.97207977; /* Percentage of water for the mixture Fr=10 */
  Y = C_YI(cell,thread,i); /*Y = percentage of water (jet)*/
  rho = 183.2*(Xwm+(1-Xwm)*Y)+814.57;
  return rho;
}

```

DEFINE_PROPERTY(mixture_viscosity, cell, thread)

```

{
  int i = 0;
  real mu;
  real Y;
  real Xwm = 0.94189077; /* Percentage of water for the mixture Fr=5 */
  Y = C_YI(cell,thread,i);
  mu = -0.0046*(Xwm+(1-Xwm)*Y)+0.0056;
  return mu;
}

```

A continuación, con el objetivo de no incluir demasiadas hojas de código, se muestra una parte del código de la función “on_demand_Energy” para el caso de estudio homogéneo donde se han incluido comentarios de forma que se pueda entender fácilmente el proceso de cálculo.

DEFINE_ON_DEMAND(on_demand_Energy) /* obtain the kinetic energy of the jet */

```

{
  /* define variables */
  real RHO_c = 998.2; /*jet*/
  real L_c = 0.02; /*Diameter*/
  real U_c = 0.100480865;
  real T_c = L_c / U_c;
  real Eadim = M_PI*RHO_c*pow(U_c,2.)*pow(L_c,3.)/4;
  real Impulse_adim = RHO_c*U_c*pow(L_c,3.);
  real Vort_adim = 1.0 / T_c;

  real x[ND_ND], x_front, u_axis, du_axis_dx, x_box, y_box;
  real delta_uds0_min = 1.E8;
  real u_axis_limit = U_c/50;
  real delta_u_min = 1.E8;

  real EkT; /*Kinetic Energy*/
  real xc[ND_ND], xc_X, xc_Y;
  real Vort, Impulse_x; /* Vorticity and Hydrodynamic Impulse*/

  curr_time = RP_Get_Real("flow-time");

  /* Get front location of the jet and (x_box,y_box) limits of the box to calculate kinetic energy*/
  /*Limits of the box where we are going to calculate kinetic energy: x_box*, y_box*/

  y_box=2.5*L_c;

  thread_axis = Lookup_Thread(d, AXIS_ID);
  begin_f_loop(face, thread_axis)

```



```

{
  F_CENTROID(x, face, thread_axis);
  c0 = F_C0(face, thread_axis);
  t0 = THREAD_T0(thread_axis);

  u_axis = C_U(c0, t0);
  if (NULL != T_STORAGE_R_NV(t0, SV_UDSI_G(0)))
  {
    du_axis_dx = C_U_G(c0, t0)[0];
  }
  else
  {
    printf("space not allocated for C_UDSI_G \n");
  }
  if (fabs(u_axis - u_axis_limit) < delta_u_min)
  {
    delta_u_min = fabs(u_axis - u_axis_limit);
    x_box = x[0] + (u_axis_limit - u_axis) / du_axis_dx;
  }
}
end_f_loop(face, thread_axis)

/*Control File is created just in case does not exist*/
/*It is used to control that energy is well calculated*/
fout3 = fopen("Control.out", "a");
fclose(fout3);
/*Open Control file*/
fout3 = fopen("Control.out", "r");
/* Read Control file */
fscanf(fout3, "%d", &Var1);
/*printf("Var1 = %d \n", Var1);*/

Ekx=0;
EkT=0;
Impulse_x=0;
/* loops over all cells */
thread_loop_c(thread, d)
{
  begin_c_loop(cell, thread)
  {
    C_CENTROID(xc, cell, thread);
    xc_X = xc[0];
    xc_Y = xc[1];
    if ((xc_X < x_box) & (xc_Y < y_box))
    {
      vol = C_VOLUME(cell, thread);
      Ux = C_U(cell, thread);
      Uy = C_V(cell, thread);
      Umod_2 = pow(Ux, 2.) + pow(Uy, 2.);
      Ekx += RHO_c * M_PI * vol * pow(Ux, 2.);
      EkT += RHO_c * M_PI * vol * Umod_2;
      Vort = C_V_G(cell, thread)[0] - C_U_G(cell, thread)[1];
      Impulse_x += RHO_c * M_PI * xc_Y * Vort * vol;
    }
  }
  end_c_loop(cell, thread)
}
if ((Ekx/Eadim)-2 < Var1) /*If Ekx = "-1.#QNAN" returns false, also if Ekx is a high value*/
{
}

```

```

else
{
  Ekx=0;
  EkT=0;
  Impulse_x=0;
  /* loops over all cells */
  thread_loop_c(thread, d)
  {
    begin_c_loop(cell, thread)
    {
      C_CENTROID(xc, cell, thread);
      xc_X = xc[0];
      xc_Y = xc[1];
      if ((xc_X < x_box) & (xc_Y < y_box))
      {
        vol = C_VOLUME(cell, thread);
        Ux = C_U(cell, thread);
        Uy = C_V(cell, thread);
        Umod_2 = pow(Ux,2.)+pow(Uy,2.);
        Ekx += RHO_c*M_PI*vol*pow(Ux,2.);
        EkT += RHO_c*M_PI*vol*Umod_2;
        Vort = C_V_G(cell, thread)[0] - C_U_G(cell, thread)[1];
        Impulse_x += RHO_c*M_PI*xc_Y*Vort*vol;
      }
    }
    end_c_loop(cell, thread)
  }
}
fclose(fout3);
/*Write Control file*/
fout3 = fopen("Control.out", "w");
fprintf(fout3, "%g\n", Ekx/Eadim);
fclose(fout3);
fout2 = fopen("vor_CENTRO_data_E_I_C_v3.out", "a");
fprintf(fout2, "%g %g %g %g %g\n",
        curr_time/T_c, x_front/L_c, Ekx/Eadim, EkT/Eadim, Impulse_x/Impulse_adim);
/* close output file where variables were written */
fclose(fout2);
}

```

La lógica utilizada y el proceso de cálculo de la energía cinética y el impulso hidrodinámico en los casos de mezcla serán similares a los utilizados en el caso homogéneo, con la salvedad de que se deberá tener en cuenta la fracción másica de agua en lugar del escalar pasivo menos difusivo. A continuación mostramos la parte del código donde se calcula la energía cinética y el impulso hidrodinámico, dentro del bucle que itera en la superficie definida por x_{box} e y_{box} :

```

if ((xc_X < x_box) & (xc_Y < y_box))
{
  vol = C_VOLUME(cell, thread);
  dens = C_R(cell, thread);
  Ux = C_U(cell, thread);
  Uy = C_V(cell, thread);
  Umod_2 = pow(Ux,2.)+pow(Uy,2.);
  Ekx += dens*M_PI*vol*pow(Ux,2.);
  EkT += dens*M_PI*vol*Umod_2;
}

```

```
Vort = C_V_G(cell, thread)[0] - C_U_G(cell, thread)[1];  
Impulse_x += dens*M_PI*xc_Y*Vort*vol;  
}
```

